POUGNES PHOENIX TSP

MAT 3101 - Éléments d'analyse et intégration

Théorie de la mesure

Tribus (engendrées)

Définition (Tribu). *Par lemme, $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω si c'est une partie de $P(\Omega)$ (famille de parties de Ω) telle que :*

- $\Omega \in \mathscr{A}$ *ou* $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\forall A \in \mathscr{A}, A^c \in \mathscr{A}$
- $\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ *ou* $\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Remarques. *Pour montrer qu'une partie A appartient à une tribu $\mathscr{A}$, on essayera donc de l'exprimer en tant qu'union, intersection et/ou complémentaire*[1] *d'éléments de $\mathscr{A}$.*

. *Pour montrer qu'un ensemble est une tribu, on ne vérifie ces points que dans les cas très simples. En général, une tribu est difficile à expliciter et on travaille donc de fait avec des tribus engendrées et le théorème associé.*

Définition (Tribu engendrée). *Soit C une famille de parties de Ω. Par proposition, il existe une unique tribu $\sigma(C)$ telle que :*

- $C \subset \sigma(C)$
- *Pour tout tribu $\mathscr{A}$: $C \subset \mathscr{A} \Rightarrow \sigma(C) \subset \mathscr{A}$*

La tribu engendrée par C est donc la plus petite tribu contenant C.

Définition - Proposition (Tribus Boréliennes). *Pour tout $k \in N$, on note $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ la tribu engendrée par l'ensemble des* ***ouverts*** *de $\mathbb{R}^k$.*
On montre en exo à connaître[2] *que c'est aussi la tribu engendrée par les* ***fermés*** *de $\mathbb{R}^k$, et que :*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a,b[\}_{a,b\in\mathbb{R}}) = \sigma(\{]a,b]\}_{a,b\in\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a,b[\}_{a,b\in\mathbb{R}}) = \sigma(\{[a,b]\}_{a,b\in\mathbb{R}})$$

Ce sont clairement les tribus les plus importantes du cours.

Proposition (Égalité de tribus engendrées). *Soit C et soit D deux familles de parties de Ω.*

$$\begin{cases} D \subset \sigma(C) \\ C \subset \sigma(D) \end{cases} \Rightarrow \sigma(C) = \sigma(D)$$

En pratique, pour montrer par exemple que $D \subset \sigma(C)$, on montre souvent que $D \subset C$ (car $C \subset \sigma(C)$ par définition de $\sigma(C)$).

1. Notons par ailleurs que : Pour $\mathscr{F}$ tribu : $(A, B \in \mathscr{F}) \Rightarrow (A \backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{F})$
2. Outre des définitions de topologie, la clé de ces démonstrations est le théorème énoncé à cette page, et ça sera le cas dans la plupart des exos sur les tribus.

Espaces mesurables, mesurés

Définition (Espace mesurable, mesuré)**.** *Couple* $(\Omega, \mathscr{A})$ *où* $\mathscr{A}$ *est une tribu. Cet espace devient un espace mesuré* $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ *si l'on y adjoint une mesure* ν *dans le sens suivant.*

Définition (Mesure positive)**.** *Soit* $\mathscr{A}$ *une tribu sur un ensemble* Ω.
Soit $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *une application. On dit que* ν *est une mesure (positive) si elle est* ***σ-additive***[3]*, i.e :*

$$\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} / (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing), \nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$$

Remarque. *Si* $\nu(\Omega) < \infty$*, la mesure est dite finie.*
Si $\nu(\Omega) = 1$*, la mesure est dite de probabilité.*

Définition (Mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure* λ *sur* $(R,\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *telle que :*
$\forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda([a, b]) = |b - a|$ *; il s'agit de la mesure de Lebesgue.*

Définitions. *Un élément* A *d'une tribu* $\mathscr{F}$ *est dit :*
- ν*-négligeable si :* $\exists B \in \mathscr{F}, A \subset B$ *et* $\nu(B) = 0$
- *vraie* ν*-presque partout* $(\nu - p.p)$ *si* A^c *est* ν*-négligeable.*

Les 3 propriétés suivantes sont très importantes et sont à maîtriser pour le CF.

Proposition (Monotonie)**.**

$$\forall A, B \in \mathscr{A} : A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B)$$

Proposition (Sous-additivité)**.** *Soit* $(A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ *:*

$$\forall (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} : \nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$$

Proposition (Continuité monotone)**.** *Soit* $(A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ *:*
- $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n)$ *(croissance)*
- $\nu(A_0) < \infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \nu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n)$ *(décroissance)*

3. L'additivité désigne la même propriété mais sur des union et somme *finies*, la nuance est importante.

Intégrale de Lebesgue

Propriétés fondamentales

Définition (Fonction mesurable). *Pour* $(\Omega, \mathscr{F})$ *et* $(E, \mathscr{E})$ *deux espaces mesurabes,* $f : \Omega \to E$ *est dite* $\mathscr{F}/\mathscr{E}$*-mesurable ssi :* $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}$

Remarque. *Cette définition est à utiliser en dernier recours. Pour montrer qu'une fonction est mesurable, utiliser dans l'ordre les méthodes présentées dans la suite.*

Méthode (Mesurabilité). *Soit* f, g, (f_n) *des fonctions,* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Si* f *et* g *sont mesurables, alors* $f+g$, λf, fg, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, f^+, f^-, $|f|$... *le sont aussi.*
- *Si* (f_n) *est une suite convergente de fonctions mesurables, alors la limite est mesurable.*
- *Si f est borélienne*[4] *et continue, alors elle est mesurable.*
- *Si f est l'indicatrice*[5] *d'un ensemble appartenant à la tribu de l'espace de départ, alors avec* $(\{0,1\}, P(\{0,1\}))$ *comme espace d'arrivée, f est mesurable.*
- *Version simplifiée de la définition : restriction à un "générateur" de* $\mathscr{E}$

$$\left\{\begin{array}{r} f : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \mathscr{E}) \\ \mathscr{E} = \sigma(C) \\ f^{-1}(C) \subset \mathscr{F} \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}$$

Si ν est une mesure, l'intégrale de Lebesgue de f sur A par rapport à ν est la quantité

$$\int_A f d\nu \triangleq \int_A f(x)\nu(dx)$$

Par construction[6] de l'intégrale de Lebesgue , on finit par pouvoir intégrer n'importe quelle fonction réelle ou complexe[7] **mesurable** f :

Réciproquement, n'oubliez pas que **toutes** les fonctions de tous les points suivants dont on prend l'intégrale seront **mesurables**. Se concentrer sur les autres hypothèses de chaque théorème, mais ne pas oublier de dire que les fonctions sont mesurables dans les copies.

Remarque.

$$\forall A \in \mathscr{A}, \int 1_A d\nu = \nu(A)$$

4. $f : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \mathscr{E})$ est dite borélienne si les tribus $\mathscr{F}$ et $\mathscr{E}$ sont boréliennes.
5. $\forall x \in E, f(x) = 1_A(x)$
6. Construction qui risque peu de faire l'objet de questions au CF. On définit d'abord l'intégrale sur les fonctions étagées $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{[f=\alpha_i]}$, puis sur les fonctions mesurables et positives, puis de signe quelconque.
7. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on pose : $\int f(x)\nu(dx) = \int \Re(f(x))\nu(dx) + i \int \Im(f(x))\nu(dx)$

Proposition (Monotonie). *Si f et g sont **positives** :*

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\nu \leq \int g d\nu$$

Proposition (Lemme de Fatou[8]). *Si (f_n) est une suite de fonctions **positives** :*

$$\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int \underline{\lim}_n f_n d\nu$$

Définition - Proposition (Intégrabilité). *f est dite intégrable[9] ssi : $\int |f| d\nu < \infty$*
Si f est intégrable, on a les propriétés suivantes :

— *Linéarité.*
— *Si g est mesurable et $|g| \leq f$, alors g est ν-intégrable et $\int |g| d\nu \leq \int f d\nu$*
— $|\int f d\nu| \leq \int |f| d\nu$
— $\nu([|f| = \infty]) = 0$

Théorèmes d'interversion

Notez que ces théorèmes sont bien plus puissants que ceux vus en prépa en raison de leurs hypothèses moindres. D'ailleurs, sauf précision contraire, les égalités suivantes seront vraies même en cas de divergence des objets considérés.

Théorème de convergence monotone et conséquence

Proposition (Convergence monotone). *Si (f_n) est une suite **positive** et croissante[10] :*

$$\int (\lim_{n\to\infty} f_n) d\nu = \lim_{n\to\infty} (\int f_n d\nu)$$

Proposition (Additivité pour des séries positives). *Si (f_n) est une suite de fonctions **positives** :*

$$\int (\sum_{n=0}^{\infty} f_n) d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} (\int f_n d\nu)$$

8. Très peu de chances de tomber. Mais au cas où : $\underline{\lim}_n a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{p\geq n} a_p)$, $\overline{\lim}_n a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{p\geq n} a_p)$
9. En toute rigueur, il faut préciser par rapport à quelle mesure. Sans précision :
- Dans les sujets, la mesure implicitement utilisée sera celle de Lebesgue, λ. On note alors dx au lieu de $\lambda(dx)$
- Dans cette fiche, ce sera une mesure quelconque ν fixée.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (ou simplement $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$)

Théorème de convergence dominée et conséquences

Proposition (Convergence dominée). *Soit I un intervalle. Si (f_n) est une suite* ***p.p-convergente*** *:*

$$\exists g, \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g, \nu - p.p \\ \int_I |g| d\nu < \infty \ (domination) \end{cases} \Rightarrow \int (\lim_{n\to\infty} f_n) d\nu = \lim_{n\to\infty} (\int f_n d\nu)$$

Proposition (Permutation série/intégrale). *Si pour presque tout x, $\sum f_n(x)$* ***converge*** *:*

Si $\exists$ g intégrable, pour presque tout x, $|\sum_{n=0}^{N} f_n(x)| \leq g(x)$

ou *l'une des quantités $\sum_{n=0}^{\infty} (\int |f_n| d\nu) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\right) d\nu$ existe et est $< \infty$, alors :*

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int f_n d\nu\right)$$

Proposition (Inversion limite/intégrale). *Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Si pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x,\omega)$ existe et s'il existe g* ***dominant <u>localement</u>***[11] *$f(\cdot,\omega)$, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{x\to x_0} f(x,\omega)\right) d\omega = \lim_{x\to x_0} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,\omega) d\omega\right)$$

Remarque. *(Continuité sous le signe $\int$)*
Il s'agit de la proposition précédente en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ où $f(\cdot,\omega)$ est continue.

Proposition (Dérivation sous le signe $\int$). *Soit $[a,b]$ un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,\omega)$ est dérivable sur $[a,b]$ et s'il existe g* ***dominant <u>localement</u>*** *$\frac{df(\cdot,\omega)}{dx}$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(\cdot,\omega) d\omega$ est dérivable en x_0, avec :*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{df(x,\omega)}{dx}\right) d\omega = \frac{d}{dx} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,\omega) d\omega\right)$$

On peut étendre à des dérivées d'ordres supérieurs par récurrence en dominant à chaque fois la dernière des dérivées partielles...

Conclusion :
Pour réussir les exos contenant de l'interversion, il faut donc en gros se demander si le résultat semble être une conséquence du théorème de convergence dominée ou plutôt du théorème de convergence monotone.

11. Au voisinage de x_0 pour x et pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}, |f(x,\omega)| \leq g(\omega)$, où g est **intégrable**

Fonctions de variables complexes

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une application $\Omega \to \mathbb{C}$ pour laquelle on notera abusivement : $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, avec P et Q réelles.

Dérivation : Holomorphie, caractère analytique

Définition (Holomorphie). *C'est en gros la dérivabilité dans $\mathbb{C}$:*
f est holomorphe en $a \in \mathbb{C}$ ssi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est unique
quelque soit la manière dont h tend vers 0. On note alors f'(a) cette limite.
Les théorèmes sur la somme, le produit et autres constructions algébriques à partir de fonctions dérivables s'appliquent aux fonctions holomorphes[12].

Proposition (Conditions de Cauchy). *f est holomorphe en $a = a_1 + ia_2 \in \Omega$ ssi P et Q sont différentiables en (a_1, a_2), avec en ce point :*

$$\frac{dP}{dx}(a_1, a_2) = \frac{dQ}{dy}(a_1, a_2), \frac{dP}{dy}(a_1, a_2) = -\frac{dQ}{dx}(a_1, a_2)$$

Remarque : ce sont les conditions de Cauchy en cartésiennes[13].

Définition - Proposition (Analytique). *f est analytique en $z_0 \in \Omega$ si elle y est développable en série entière :*

$$\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \exists \bar{B}(z_0, r) \subset \Omega, \forall z \in B(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Une fonction analytique est holomorphe (et même infiniment dérivable - et continue au passage) sur $B(z_0, r)$, on la dérive comme pour les séries entières[14].

Proposition (Théorème de Cauchy). *Équivalence holomorphe/analytique :*
On admet que toute fonction holomorphe est analytique d'après ce théorème.

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* : \bar{B}(z_0, r) \subset \Omega \Rightarrow \begin{cases} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt \end{cases}$$

La "dérivabilité" d'une fonction complexe se déduit donc, par ordre de préférence : soit d'une construction algébrique de fonctions "dérivables", soit du caractère analytique (qui se voit), soit des conditions de Cauchy, soit de la définition. Réciproquement, le théorème de Cauchy assure l'équivalence entre l'holomorphie et le caractère analytique (voir p37 du poly pour des détails).

12. Note : les composées de fonctions dont les ensembles d'arrivée et de départs concordent sont bien définies.
13. En polaire, ça donne : $r\frac{dP}{dr} = \frac{dQ}{d\theta}, \frac{dP}{d\theta} = -r\frac{dQ}{dr}$. C'est en général rappelé dans les sujets.
14. Par ailleurs : $\forall z \in B(z_0, r), a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$

Intégration : Calcul d'intégrales curvilignes, utilisation des résidus

Définition (Intégrale curviligne)**.** *Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ un arc/contour* ***orienté***[15] *($\mathscr{C}^1$ par morceaux). Par définition :*

$$\int_\gamma f(z)dz \triangleq \int_\alpha^\beta f[\gamma(t)]\gamma\,'(t)dt$$

Concrètement, privilégier les contours **fermés** (lacets) i.e. tels que $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ afin d'utiliser les théorèmes associés[16]. LE théorème clé est celui des résidus.

Proposition (Théorème des résidus)**.** *Soit γ un lacet* ***fermé*** *orienté, inscrit dans Ω un ouvert simplement connexe*[17] *et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$* ***holomorphe*** *en tout point de γ et de son intérieur* ***sauf en des points*** *singuliers $(s_k)_{k=1}^n$ de Ω ; alors :*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(s_k)Res(f, s_k)$$

Indices *: $Ind_\gamma(s_k)$ est le nombre* algébrique *de fois que γ tourne autour de s_k : $+1$ en cas de tour dans le sens trigonométrique, -1 dans le sens indirect.*

Résidus *: $Res(f, s_k) = c_{-1}$, où $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la famille des coefficients de la décomposition en série de Laurent de f : pour tout z dans une couronne centrée en s_k, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - s_k)^n$*

Pour un pôle d'ordre p :

$$Res(f, s_k) = \lim_{z\to s_k} \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}[(z - s_k)^p f(z)]$$

EN CAS DE DOUTE SUR CE THÉORÈME ESSENTIEL, CF PAGES 44-45 DU POLYCOPIÉ !

Proposition (Théorème de Cauchy homotope)**.** *Théorème des résidus sans résidus.*
Si γ est fermé, et f holomorphe sur γ et son intérieur, $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$

Méthode (Usage du lemme de Jordan)**.** *Pour des arc de cercles γ_r de rayons r centrés en $a \in \Omega$:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to a}(z - a)f(z) = 0 & \Rightarrow \quad \lim\limits_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 & \Rightarrow \quad \lim\limits_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \end{cases} \quad (f \text{ devant être continue})$$

Il suffit donc de majorer $zf(z)$ par une fonction $g(r) \to 0$ indépendante de γ_r et d'invoquer le lemme. À réserver aux arcs de cercles, souvent en combinaison avec le théorème des résidus.

15. $\int_\gamma$ change de signe suivant le sens de parcours de γ. Notons par ailleurs que dans ce contexte, si $\alpha \geq \beta$, alors l'intervalle $[\beta, \alpha]$ est simplement parcouru en sens indirect, donc on rajoute un signe $-$.
16. Dans les exos (durs) avec des intégrales réelles a priori incalculables, il faut aussi le faire, quitte à ensuite décomposer le lacet en portions d'arcs où le calcul de l'integrale curviligne est simple.
17. On peut "réduire continûment" γ à un point de Ω.

Espaces de Hilbert (ancien programme, chapitre bientôt remplacé)

Définition - Proposition (Espaces de Banach). *C'est un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ complet pour la norme associée, ie toute suite de Cauchy*[18] *est convergente dans l'espace considéré. On montre qu'un evn est complet ssi toute série normalement convergente est convergente, ie ssi :* $\forall (u_n) \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n|| < \infty \Rightarrow \exists S, ||\sum_{n=0}^{\infty} u_n - S|| \to 0$

Définition (Espace de Hilbert). $(E, ||\cdot||)$ *est un espace de Hilbert ssi, de manière équivalente :*

- *C'est un ev muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée*
- *C'est un espace de Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire*

Proposition (Théorème important[19]). *Si H est un espace de Hilbert, pour toute suite $(u_n) \in H^N$ d'éléments deux à deux orthogonaux :* $\sum u_n$ *CV* $\Leftrightarrow \sum ||u_n||^2$ *CV, et si cela se vérifie, on a en plus :* $\sum ||u_n||^2 = ||\sum u_n||^2$ *(se prouve par caractérisation des suites de Cauchy)*

Proposition (Théorème). *Si F est un sev* ***fermé*** *d'un espace de Hilbert H, la projection orthogonale de $h \in H$ sur F est l'unique $f \in F$ tel que :* $\forall f_1 \in F, (h - f|f_1) = 0$

Définition - Proposition (Totalité). *une partie A d'un espace de Hilbert H est dit total ssi $Vect(A)$ est dense dans H, ssi* $\overline{Vect(A)} = H$, *ssi* $A^{\perp} = \{0\}$ *ssi* $(\forall a \in A, (u|a) = 0) \Rightarrow u = 0$

Proposition (Décomposition). *Soit H un espace de Hilbert* ***séparable***[20]*, alors :*
$\forall f \in H, \exists (c_j(f)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (e_j) \in H^{\mathbb{N}}$,
$f = \sum_j c_j(f) e_j = \sum_j (f|e_j) e_j$,
où (e_j) est une base orthonormale de H total (base hilbertienne).

On a alors de plus : $||f||^2 = \sum_j |c_j(f)|^2$

Définition (Support). *Pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0\}}$
C'est donc un fermé, et donc un compact (car $\mathbb{R}$ est de dimension finie).

Définition (Espaces fonctionnels usuels). *Il faut connaître :*

$L_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$: *Espace des fonctions réelles sommables pour la relation d'équivalence* $f \underset{p.p.}{=} g$ *.*
Muni de la norme $||f||_1 = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |f(x)| dx$, *c'est un espace de Banach.*

$L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$: *Espace des fonctions réelles de carrés sommables (même relation d'équivalence).*
Muni du produit scalaire[21] $(f|g) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x)\overline{g(x)} dx$, *c'est un espace de Hilbert séparable.*

$L_\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$: *Espace des fonctions réelles essentiellement bornées. Muni de la norme*
$||f||_\infty = \mathrm{suppess}|f| = \inf\{a \in R / \lambda(\{f(x) > a\})\}$, *c'est un espace de Banach.*

Remarque. $\forall A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \nu(A) < \infty \Rightarrow L_\infty(A) \subset L_2(A) \subset L_1(A)$

18. (u_n) est de Cauchy ssi : $\lim_{n,p \to \infty} ||u_n - u_p|| = 0$
19. Théorème dont la démonstration est le seul exo sur les espaces de Hilbert que l'on trouve dans les annales...
20. Séparable : admettant une famille dénombrable dense. Tout espace séparable admet une base hilbertienne.
21. C'est une convention de conjuguer g ou bien f, cela est arbitraire et devra être précisé dans les exos.

Transformation de Fourier

$(L_i(\mathbb{R}))_{i=1,2}$ *sont des espaces de Hilbert, d'où l'ancienne légitimité du chapitre précédent.*

Dans $L_1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier : $\mathscr{F} : f \in L_1(\mathbb{R}) \to \widetilde{f} \in L_\infty(\mathbb{R})$, *où :*

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \widetilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \; (= \mathscr{F}_{[f(x)]} \text{ par abus de notation})$$

Transformée inverse : *Si* $\widetilde{f} \in L_1(\mathbb{R})$, *alors pour tout point x où f est continue :*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu \; (\text{si } f \text{ est continue en } x)$$

Produit de convolution : $\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$

— *Si* $f, g \in L_1(\mathbb{R}), f * g \overset{\mathscr{F}}{\to} \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$
— *Si* $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), f \cdot g \overset{\mathscr{F}}{\to} \widetilde{f} * \widetilde{g}$

Dans $L_2(\mathbb{R})$

$L_2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx < \infty\}$ *est muni du produit scalaire* $(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Théorème de Plancherel : $\mathscr{F}$ *est une isométrie d'espace de Hilbert :*

$$\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}), (f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\nu)\overline{\widetilde{g}(\nu)}d\nu = (\widetilde{f}|\widetilde{g})$$

Théorème de Parseval : *Théorème de Plancherel avec* $f = g$ *:*

$$\forall f \in L_2(\mathbb{R}), ||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(\nu)|^2d\nu = ||\widetilde{f}||^2$$

Tous les éléments utiles du chapitre se trouvent être résumés sur cette page, mais chacune des hypothèses est ***absolument*** *nécessaire et doit être précisée : la transformation de Fourier n'est pas toujours inversible, la deuxième formule sur le produit de convolution nécessite des fonctions de $L_2(\mathbb{R})$ en plus d'être dans $L_1(\mathbb{R})$, etc.*
Ce chapitre doit absolument être maîtrisé car les 2/3 de ce qui suit vont en dépendre[22] *…*

22. Ainsi que le module SIC 3601, qui tient beaucoup à cœur à l'auteur.

Extension : Transformation de Laplace (points essentiels)

Concrètement, la transformation de Laplace est une extension de la transformée de Fourier, et n'est à peu près jamais[23] *tombé aux CFs. On se contentera donc de résumer la terminologie, tous les résultats s'appuyant sur la transformation de Fourier.*

Définitions diverses :

Fonctions causales : *Fonction f telle que :* $\forall t < 0, f(t) = 0$

Transformée de Laplace : *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement sommable*[24]*,*
la transformée de Laplace (unilatérale) de f est la fonction

$$\hat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ p & \mapsto & \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \end{array}$$

Il existe une transformée bilatérale[25]*, inutile car on s'intéresse à des fonctions causales.*

Original : *Fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ causale, localement sommable, telle que :*

$$\exists M > 0, s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq Me^{st}$$

Image : *Transformée de Fourier d'un original.*

Proposition (Lien entre transformées de Fourier et Laplace)**.** *Pour tout fonction f causale admettant une transformée de Fourier, on a :*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(i\omega) = \tilde{f}(\frac{\omega}{2\pi})$$

Domaine/abscisse de sommabilité : *Posons $p = x + i\omega$*

Abscisse de sommabilité d'un original f : $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}, \left(t \to |f(t)|e^{-tx}\right) \in L^1(\mathbb{R})\}$.

Domaine de sommabilité : *Pour $x < \alpha$, $\left(t \mapsto |f(t)|e^{-pt}\right)$ n'est pas intégrable, pour $x > \alpha$, cette fonction l'est*[26]*. Le domaine de sommabilité est donc un demi-plan ouvert.*

Transformée inverse, contour de Bromwich : *Pour un original f d'abscisse de sommabilité α, en tout point t de continuité de f et pout tout $x_0 > \alpha$, $f(t) = \dfrac{1}{2i\pi}\int_{D_x} \hat{f}(p)e^{pt}dp$, où $D_x = \{x + i\omega, \omega \in \mathbb{R}\}$ est le contour de Bromwich.*

Propriétés *Les plus importantes sont :*

- *La convolution*
- *La dérivation*
- *La intégration*

Tous ces résultats sont écrits dans le poly et découlent de la transformée de Fourier.

23. Ou alors les annales sont trop vieilles et les pougnes Phoenix n'ont pas bossé avec.
24. Intégrable sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note : $L^1_{loc}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall [a, b] \subset \mathbb{R}, \int_a^b |f| < \infty\}$
25. En intègrant sur $\mathbb{R}$ entier. Mais puisqu'intégrer une fonction causale sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ est équivalent...
26. Si $x = \alpha$, on ne sait pas.

Distributions

Fonctions tests - Espace $\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \text{supp} f$ borné donc compact$\} \subset \mathscr{S}$

Propriétés[27] **à connaître**

- $\phi \in \mathscr{D} \Rightarrow \phi\,' \in \mathscr{D}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathscr{D} \\ \alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \end{array} \right. \Rightarrow \alpha\phi \in \mathscr{D}$

Convergence dans $\mathscr{D}$: $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \phi \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists B_{borné} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{supp}\phi_n \subset B \\ \forall k \in \mathbb{N}, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\phi_n^{(k)}(t) - \phi^{(k)}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array} \right.$$

Espace de Schwartz - Espace $\mathscr{S} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall n, m \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n \phi^{(m)}$ bornée $\} \supset \mathscr{D}$

Propriétés[28] **à connaître**

- $\phi \in \mathscr{S} \Rightarrow \phi\,' \in \mathscr{S}, \tau_a\phi \in \mathscr{S}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathscr{S} \\ \alpha \in O_M \end{array} \right. \Rightarrow \alpha\phi \in \mathscr{S}$

Convergence dans $\mathscr{D}$: $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{S}} \phi \Leftrightarrow$

$\forall p, q \in \mathbb{N}, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x|^p |\phi_n^{(q)}(t) - \phi^{(q)}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Distributions - Espace $\mathscr{D}\,' = \{$formes linéaires continues sur $\mathscr{D}\}$

Montrer qu'une forme linéaire[29] **sur $\mathscr{D}$ est une distribution (*i.e.* montrer la continuité sur $\mathscr{D}$) :** $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow$ $< T, \phi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *(par majoration en général)*

Distributions de Dirac :
$\forall \phi \in \mathscr{D}, < \delta_{(a)}, \phi >= \phi(a)$ $(\delta_{(0)} = \delta)$

Distributions régulières T_f

$\forall f \in L^1_{loc}, \forall \phi \in \mathscr{D}, < T_f, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)dt$
(Une distribution singulière n'est pas régulière.)

Théorème $\forall f, g \in L^1_{loc} : T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$
(d'où l'identification fréquente de f et T_f)

Multiplication $\forall (\alpha, \phi) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times \mathscr{D}$:
$< \alpha T, \phi >=< T, \alpha\phi >$

Dérivation *(À appliquer dans l'ordre)*

- *À combiner aux points suivants :*
  $\left\{ \begin{array}{l} T \in \mathscr{D}' \\ \alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$
- *Si T_f est régulière : Formule des sauts : avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ discontinue sur $(a_k)_{k=1}^p$:*
  $(T_f)' = T_{f'} + \sum\limits_{k=1}^{p} \left[f(a_k^+) - f(a_k^-) \right] \delta_{(a_k)}$
- *Si T est singulière :* $\forall k \in \mathbb{N}$:
  $\forall \phi \in \mathscr{D}, < T^{(k)}, \phi >= (-1)^k < T, \phi' >$

Convergence dans $\mathscr{D}\,'$:

$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}'} T \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} < T_n, \phi >=< T, \phi >$

27. Ces propriétés passent à la limite dans $\mathscr{D}$.
28. Voir poly pour notations.
29. Insiter sur ce point dans les copies, car la continuité en 0 n'est suffisante que parce que la forme est *linéaire*.

Distributions tempérées - $\mathscr{S}$ ' $= \{$formes linéaires continues sur $\mathscr{S}\} \subset \mathscr{D}$ '

Montrer que T est une distribution tempérée sur $\mathscr{D}$:

- *Montrer que T est* ***définie*** *(pas toujours évident) et est une forme* ***linéaire***
- *Montrer la continuité (en 0 grâce à la linéarité) :*
  $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{S}} 0 \Rightarrow < T, \phi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *Le* $2^{\text{ème}}$ *point se fait en général par majoration.*

Tout ce qui précède concernant les distribution est valable pour les distributions tempérées. Leur utilité est de pouvoir en calculer la transformée de Fourier.

Transformée de Fourier d'une distribution tempérée T

Définition. *La transformée de Fourier d'une distribution tempérée T est la fonctionnelle* $\mathscr{F}_{[T]}$ *définie par :* $\forall \phi \in \mathscr{S}, < \mathscr{F}_{[T]}, \phi > = < T, \mathscr{F}_{[\phi]} >$
On a une formule très analogue pour la Transformée de Fourier inverse.

Remarque. *Pour les distributions régulières* T_f*, cette définition implique que* $\mathscr{F}_{[T_f]} = T_{\mathscr{F}_{[f]}}$*, ce qui flatte l'intuition.*

Finalement, cela permet de tout rapporter aux transformées de Fourier, maîtrisées sur L^1 *grâce à une formule. Les principales propriétés en découlent viennent alors soit du poly, soit de simples calculs sur les transformées de Fourier usuelles.*

Même si ce chapitre est le dernier du module, le travailler sérieusement car il tombe chaque année, et parfois de manière prépondérante (voir CF1 2015-2016 par exemple)...