Exercices de Files d'Attentes

Monique Becker
André-Luc Beylot
Alexandre Delye de Clauzade de Mazieux

2006-2007 v.2

Table des matières

Chapitre 1

Exercices généraux

1.1 Modèle du dentiste

On considère une file d'attente à un serveur.
On suppose que le débit moyen est Λ, le temps moyen de réponse est $E[R]$, le temps moyen d'attente est $E[W]$, le temps moyen de service est $[E]S$, l'espérance de longueur de la file d'attente est $E[L]$, le nombre moyen de clients en train d'attendre est $E[L_W]$, le nombre moyen de clients en train d'être servis est $E[L_S]$ et la probabilité pour que le serveur soit occupé est U.
1- Ecrire une relation entre $E[R]$, $E[S]$ et $E[W]$ (relation 1).
2- Ecrire une relation entre $E[L]$, $E[L_W]$ et $E[L_S]$ (relation 2).
3- Exprimer $E[L_S]$ en fonction de U.
4- Montrer que l'on passe de la relation 1 à la relation 2 en faisant une opération simple et montrer qu'on trouve ainsi une relation connue entre U, Λ et $E[S]$.
5- On considère un dentiste. Le nombre moyen de patients présents chez lui est 2.8, le nombre moyen de patients dans la salle d'attente est 2, le nombre moyen de clients arrivant en une heure est 4. Déduire les autres critères de performances et caractéristiques du traitement.

1.2 Temps d'attente d'un train

On considère une voie ferrée sur laquelle les passages des trains sont séparés par des durées (durée entre deux trains successifs) de deux types possibles :

- 90% de ces durées sont constantes et égales à 6 mn.
- 10% de ces durées sont constantes et égales à 54 mn.

1- Calculer la durée moyenne séparant deux trains successifs
2- Un individu arrive à un instant quelconque. Au bout de combien de temps en moyenne pourra-t-il prendre un train ?
On fera le calcul de deux façons différentes :
a- En calculant la probabilité pour que l'individu arrive pendant un intervalle court entre deux trains. On en déduira le temps d'attente résiduelle.
b- En appliquant la formule de Pollaczek Khintchine.
3- Comparer les résultats de 1 et 2. Ces résultats semblent-ils paradoxaux ?

Chapitre 2

Chaînes de Markov à temps discret

2.1 Etude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

Soit une chaîne de Markov à trois états : 1, 2 et 3.
Les probabilités de transition de l'état 1 vers les états 2 et 3 sont respectivement $1-p$ et p.
La probabilité de transition de l'état 2 vers l'état 1 est 1.
Les probabilités de transition de l'état 3 vers les états 2 et 3 sont respectivement α et $1-\alpha$.
1- Pour quelles valeurs du couple (α, p) cette chaîne est-elle irréductible et apériodique ?
2- Pour (α, p) vérifiant ces conditions, déterminer les probabilités d'état à l'équilibre.
3- En régime permanent, pour quelles valeurs de (α, p) les trois états sont-ils équiprobables ?
4- Calculer le temps moyen de premier retour en 2.

2.2 Processus de naissance et de mort

Soit une chaîne de Markov infinie dont les états sont numérotés à partir de 0.
La probabilité de transition de l'état n à $n+1$ est p.
La probabilité de transition de l'état n à $n-1$ est q.

Démontrer qu'il faut avoir $p < q$ pour que les états soient récurrents non nuls. On utilisera un théorème vu en cours et on effectuera des coupes pour trouver rapidement la solution.

2.3 Modèles de trafic sur un lien

On considère un lien transportant des cellules de longueur constante. Compte tenu du synchronisme global, on modélise le trafic sous forme d'une chaîne de Markov à temps discret.
1- Trafic de Bernoulli
On suppose que les cellules sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque unité de temps on a une probabilité p qu'il y ait une cellule et $1-p$ qu'il n'y en ait pas. Si l'on note $Z(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a une cellule à l'instant t et 0 sinon, on a $P[Z(t) = 1] = p$ et $P[Z(t) = 0] = 1 - p$ pour toutes les valeurs de t.
a- Modéliser ce processus sous forme d'une chaîne de Markov à deux états.
b- Calculer les probabilités des états, le débit de cellules et les deux premiers moments du temps séparant deux cellules successives.
2- Trafic Bursty Geometric
On suppose que le trafic comporte des silences et des rafales. Pendant les silences il n'y a pas de cellule sur le lien ; pendant les rafales, il y a une cellule à chaque unité de temps. On note $X(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on est dans une rafale à l'instant t et 0 dans un silence. On suppose que $P[X(t+1) = 1/X(t) = 1] = p$ et $P[X(t+1) = 0/X(t) = 0] = q$.
a- Montrer que l'on peut représenter le processus $(X(t))$ par une chaîne de Markov.

b- Déterminer les probabilités stationnaires des deux états et le débit de cellules. Montrer que les durées des silences et des rafales sont géométriquement distribuées. En déduire leur durée moyenne. Déterminer les deux premiers moments du temps séparant deux cellules successives.
c- Pour quelles valeurs de p et q un processus Bursty Geometric est-il un processus de Bernoulli ?
3- Trafic Interrupted Bernoulli Process (IBP)
Le trafic comporte de nouveau des silences et des rafales de durées géométriquement distribuées de paramètres respectifs p et q. Durant les rafales, les cellules arrivent selon un processus de Bernoulli de paramètre α. Soit $Y(t)$ le processus des arrivées de cellules. On aura donc $P[Y(t) = 1/X(t) = 1] = \alpha$ et $P[Y(t) = 0/X(t) = 0] = 1$.
a- $Y(t)$ est-il un processus markovien ?
b- Déterminer le débit, les longueurs moyennes des silences et des rafales d'un processus IBP.

Chapitre 3

Chaînes de Markov à temps continu

3.1 Processus de Poisson

Application des processus de naissance et de mort : cas d'un processus de naissance pure. C'est un processus pour lequel la probabilité conditionnelle de naissance entre t et $t + dt$ vaut λdt.
Soit K la variable aléatoire correspondant au nombre de naissances entre 0 et t :

$$P[K(t + dt) = k + 1/K(t) = k] = \lambda dt$$

1- Ecrire les équations différentielles permettant d'étudier la famille de fonctions (P_k), où :

$$P_k(t) = P[K(t) = k]$$

2- Démontrer que l'on obtient

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

3- Calculer $E[K(t)]$ et $E[K(t)(K(t) - 1)]$. En déduire $Var[K(t)]$.
4- Calculer la fonction de répartition du temps séparant deux arrivées. En déduire sa densité de probabilité. Donner son espérance mathématique.

Chapitre 4

Files d'attentes simples

4.1 Modèle du réparateur

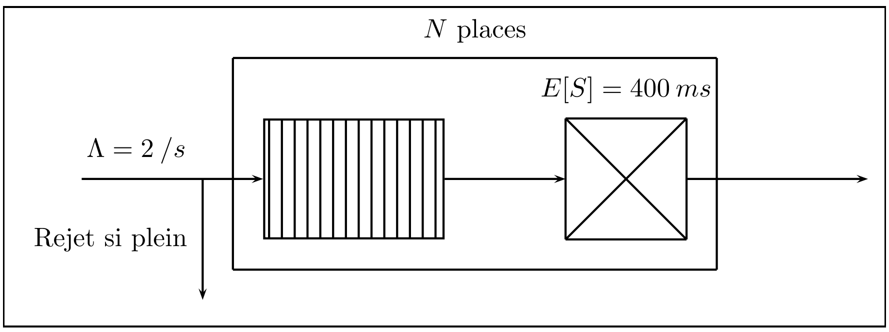
On considère une chaîne de Markov modélisant K machines indépendantes.
Chacune d'elles peut tomber en panne avec un taux λ.
Un réparateur répare une seule machine à la fois avec le taux μ.

1- Exprimer le taux de passage de l'état (n machines en panne) à l'état ($n+1$ machines en panne). On fera une démonstration rigoureuse. Il sera peut-être nécessaire de démontrer au préalable un lemme sur la loi de l'inf d'un certain nombre de variables de loi exponentielle.

2- Calculer la probabilité d'avoir K machines en panne.

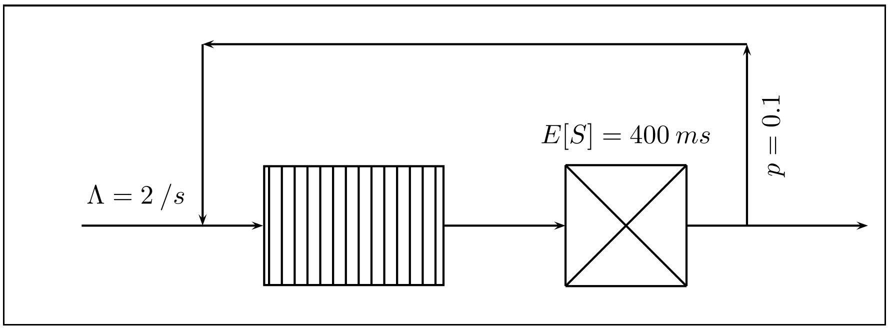
3- Application numérique : $K = 7$, $\lambda = 0.001$, $\mu = 1$.

4.2 Unité de transmission à capacité limitée



On suppose que les messages forment un trafic poissonnien, de débit moyen 2 messages par seconde. La durée de transmission est exponentielle de moyenne $E[S] = 400\,ms$ et on néglige les erreurs de transmission. On suppose que la priorité est FIFO.
Quelle doit être la capacité du nœud de transmission pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-3} ?

4.3 Unité de transmission avec des erreurs de transmission



On considère un émetteur de messages.

- Les messages arrivent avec un débit moyen de 2 messages par seconde.
- La durée moyenne de transmission est $E[S] = 400\, ms$.
- Le taux d'erreur (donc de retransmission) est $p = 10\%$.
- La capacité est infinie

On fait les hypothèses suivantes : arrivées poissonniennes, services exponentiels, priorité FIFO.
1- Calculer l'espérance e du nombre de passages d'un client dans cette file.
2- Calculer l'espérance du temps R séparant l'arrivée du message et le moment où il est transmis correctement.

4.4 Etude de la file M/M/C/C

Il s'agit d'une file avec arrivées poissonniennes de taux λ avec C serveurs exponentiels de taux μ et avec C places dans la file d'attente. Cela signifie que seuls peuvent entrer dans la file les clients qui peuvent immédiatement commencer à être servis, les autres sont rejetés.
1- Démontrer que le nombre de clients dans la file constitue un processus de naissance et de mort. Calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
2- Calculer la probabilité des divers états possibles.
3- En déduire la probabilité pour qu'un client arrivant de l'extérieur soit rejeté. Le résultat est connu sous le nom de première formule d'Erlang.
4- Calculer le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen de réponse.

4.5 File à Serveurs Hétérogènes

On se propose d'étudier une file d'attente simple ayant 2 serveurs. Dans tout l'exercice, les arrivées seront supposées poissonniennes de taux λ. Les temps de service sont exponentiels, la discipline est FCFS (premier arrivé, premier servi), la file est à capacité infinie.
1- Serveurs homogènes
On suppose dans un premier temps que les deux serveurs sont identiques. Le taux de service est μ (cf. Fig 4.1). Quand un seul serveur est disponible, le premier client en attente choisit ce serveur. Quand les deux serveurs sont disponibles, le client choisit aléatoirement et équiprobablement un des deux serveurs.

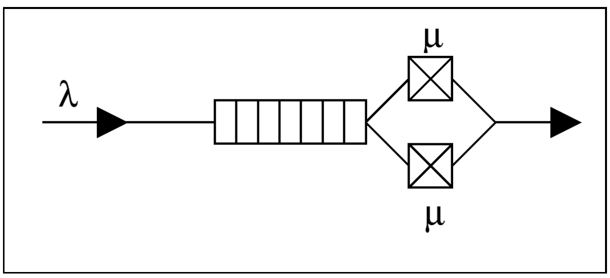


FIG. 4.1 – Serveurs homogènes

a- Donner la notation de Kendall de cette file.
b- On note $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t.
Montrer que $N(t)$ est un processus markovien (on pourra montrer que l'inf de deux lois exponentielles indépendantes de paramètres μ_1 et μ_2 est une loi exponentielle).
Démontrer que $N(t)$ constitue un processus de naissance et de mort et calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
c- On veut calculer les probabilités des divers états possibles.
On note π_i la probabilité qu'il y ait i clients dans la file à l'état stationnaire.
Démontrer que :

$$\forall i \geq 1 \quad \pi_i = 2\rho^i \pi_0 \quad avec \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Déterminer π_0.
Quelle est la condition de stabilité de la file ?
d- Déterminer le nombre moyen $E[L]$ de clients dans la file.
Quel est le temps moyen de réponse E[R] ?
On rappelle que pour $\rho < 1$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

2- Serveurs hétérogènes

On suppose maintenant que le serveur 1 est deux fois plus rapide que le serveur 2 (cf. Fig 4.2).
On note 2μ le taux de service du serveur 1 et μ le taux de service du serveur 2.
Le choix du serveur se fait de la façon suivante :
Si un seul serveur est disponible, le premier client en attente choisit ce serveur.
Si les deux serveurs sont libres, le premier client en attente choisit le serveur le plus rapide (le serveur 1).

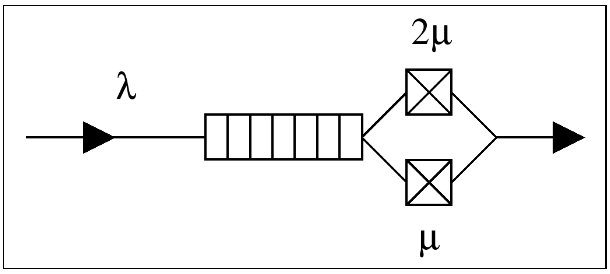


FIG. 4.2 – Serveurs hétérogènes

a- On note $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t.
N(t) est-il un processus markovien ?
b- On sépare l'état où l'on a un seul client dans la file en deux états :
état $1'$: il y a un seul client dans la file, il se trouve dans le serveur 1.
état 1" : il y a un seul client dans la file, il se trouve dans le serveur 2.
On considère le processus $E(t)$:
$E(t) = i$, avec $i = 0$ ou $i \geq 2$ s'il y a i clients dans la file à l'instant t.
$E(t) = 1'$, s'il y a un client dans la file à l'instant t qui se trouve dans le serveur 1.
$E(t) = 1$", s'il y a un client dans la file à l'instant t qui se trouve dans le serveur 2.
Montrer que $E(t)$ est un processus markovien.
Calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
$E(t)$ est-il un processus de naissance et de mort ?
c- On cherche la limite stationnaire de ce processus.
Pour simplifier les calculs on suppose que $\lambda = \mu$.
On note π_i la probabilité stationnaire d'être dans l'état i de la chaîne de Markov.
Déterminer les probabilités des différents états.
On pourra suivre la démarche suivante : déterminer π_3 en fonction de π_2, puis π_{i+2} en fonction de π_2 pour $i > 0$. En écrivant trois équations entre π_0, $\pi_{1'}$, $\pi_{1''}$, et π_2, montrer que :

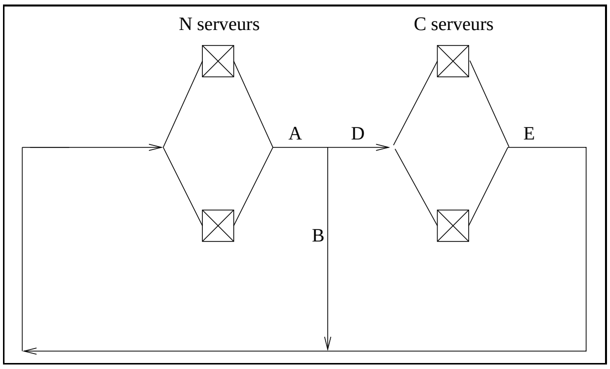
$$\pi_0 = 5\pi_2 \quad \pi_{1'} = 2\pi_2 \quad \pi_{1''} = \pi_2$$

Utiliser la condition de normalisation et déterminer les π_i.
Le système est-il stable ?

d- Quel est le nombre moyen $E[L]$ de clients dans la file ?
Quel est le temps moyen de réponse $E[R]$?
Quel est le taux d'occupation de chacun des serveurs ?
Quel est le temps moyen d'attente $E[W]$?
Quelle est la proportion de clients servis par chacun des deux serveurs ?

4.6 Performance d'un étage d'abonnés - File M/M/C/C/N

Dans le modèle d'un lien du réseau téléphonique par une file M/M/C/C, on suppose que le nombre d'utilisateurs potentiels du lien est infini. Si cette hypothèse est raisonnable dans le cœur du réseau, elle peut se révéler un peu forte dans la partie d'accès (commutateurs d'accès, cellule d'un réseau GSM ...). L'objectif de cet exercice est d'étudier les performances d'un lien dans le cas où le nombre d'utilisateurs pouvant être joints par ce lien est limité à N (taille de la population N, $C << N$).
On modélise alors le lien de la façon suivante :



La deuxième file correspond au lien. Un client dans cette file correspond à un appel téléphonique en cours.
La première file correspond aux abonnés qui ne sont pas en communication. Le temps de réflexion (temps passé dans la file 1) avant une tentative d'appel est supposé exponentiel de taux λ. La durée de la communication est supposée exponentielle de taux μ.

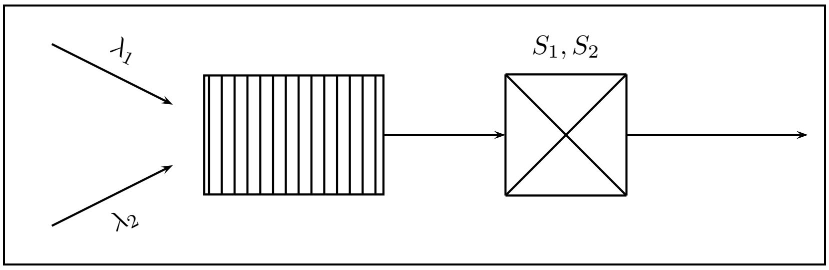
Quand un appel arrive (en provenance ou à destination d'un abonné qui n'est pas encore en communication), il est accepté s'il reste de la place dans la deuxième file ou rejeté (on suppose alors que l'utilisateur repasse dans la file 1, on ne tient pas compte de son impatience potentielle). On veut déterminer la probabilité de rejet d'appel.

1- Soit N_t le nombre d'appels en cours à l'instant t. Montrer que $(N_t,\ t \in \mathbb{R})$ est un processus markovien ergodique.

2- Déterminer les probabilités en régime stationnaire.

3- On veut déterminer la probabilité de rejet. Pour cela, déterminer le flux offert au lien (débit au point A : Λ_A) et le débit rejeté (débit au point B : Λ_B). En déduire la probabilité de rejet. Que constate-t-on ?

4.7 Influence de la variance des services et de la loi de priorité



On suppose qu'il y a deux classes de clients.
Les arrivées sont poissonniennes :

- classe 1 : une arrivée toutes les $2,4\,s$;
- classe 2 : une arrivée toutes les $0,8\,s$.

Les services :

- classe 1 : moyenne $E[S_1] = 0,6\,s$;
- classe 2 : moyenne $E[S_2] = 0,3\,s$.

Comparer les temps de réponse (globaux et par classe) dans le cas de services exponentiels et déterministes et de discipline PS ou FCFS.

4.8 Longueur des paquets IP

L'analyse de la distribution des paquets IP dans l'Internet montre qu'il y a de très nombreux paquets de petite taille (Acquittements TCP, paquet ICMP).
Dans le présent exercice, on les suppose tous de la même taille égale à $l_1 = 50$ octets. Un deuxième pic est constitué par des paquets d'environ $l_2 = 500$ octets (limités par le MSS standard) et un troisième pic de paquets rentrant dans des trames Ethernet ($l_3 = 1500$ octets). On suppose que les fréquences d'apparition des autres types de paquets sont négligeables. Une campagne de mesure a donné les résultats suivants :
Taille moyenne des paquets : $E[L] = 500$ octets.
Ecart-Type : $\sigma(L) = 500$ octets.

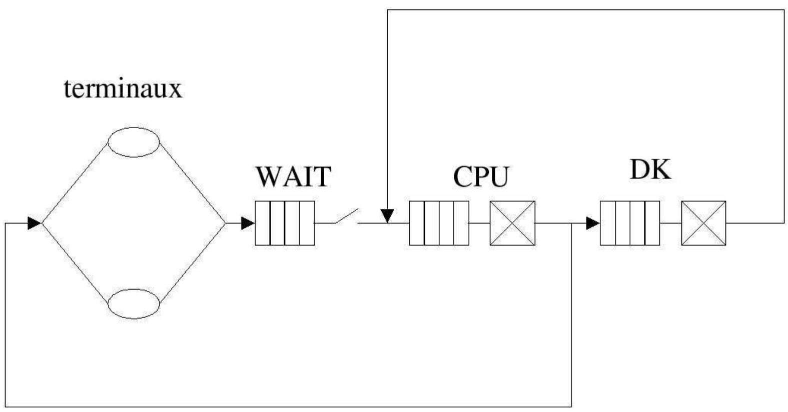
On considère un lien à 100 Mb/s reliant un routeur A à un routeur B chargé à 80% dans le sens de A vers B.
On s'intéresse au temps moyen passé dans la file de sortie du routeur A en attente d'émission vers le routeur B. On considère que les arrivées des paquets dans la file constituent pour chacun des trois types de paquets un processus poissonnien et que la discipline est FIFO.
1- Déterminer le temps moyen passé par un paquet de chacun des trois types dans la file de sortie du routeur (attente + service) en fonction des grandeurs caractéristiques du système.
2- Faire les applications numériques.

Chapitre 5

Réseaux de files d'attentes

5.1 Système multi-programmé à mémoire virtuelle

On considère un système interactif, composé essentiellement de N terminaux, d'une unité centrale (UC) et d'un disque de pagination (DK). Le degré de multiprogrammation (nombre de programmes autorisés à partager l'UC et le disque) est limité à une certaine valeur maximale M. Les programmes émis des terminaux (un programme par « interaction ») qui ne peuvent pas être admis dans le système central sont placés en attente dans une file WAIT. Le système est schématisé sur la figure suivante :



Le nombre de terminaux est $N = 10$.
Le temps de reflexion moyen est $E[Z] = 4\,s$.
Le degré de multiprogrammation est $M = 4$.
La durée moyenne du service disque est $E[S_{dk}] = 40\,ms$.
On effectue des mesures sur une durée assez longue et on obtient les estimations suivantes :
L'espérance du temps d'execution d'une interaction (en cumulant tous les temps entre deux interruptions est) est de $2s$. Débit : 0,4 interactions/s.
Taux d'occupation CPU : 0,8.
Nombre moyen d'appels au disque par interaction : 50.
1- On a constaté que la file WAIT n'était jamais vide. Que peut-on en conclure ?
Quels sont les temps de réponse moyen R du système complet (vu des terminaux) et R' du système central ?
En déduire le temps d'attente moyen dans la file WAIT.
2- Calculer les demandes totales de traitement au CPU et au disque, par interaction.
Pour ces demandes totales au CPU et au disque, peut-on majorer le débit de sortie du système central ?

Par la suite, on fera l'hypothèse que les services disque et CPU sont distribués suivant des lois exponentielles et indépendantes, que la loi de priorité est FIFO et que les files sont infinies.

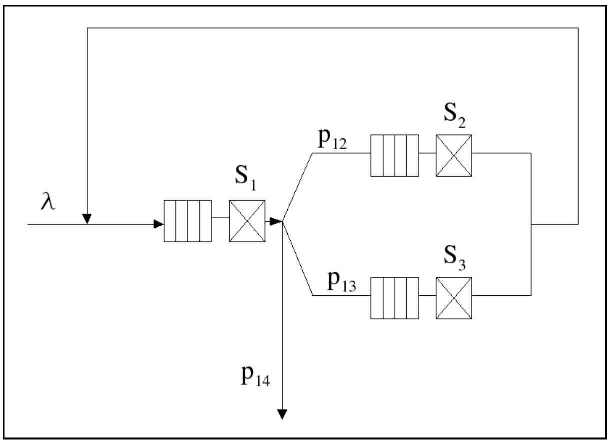
3- Si les entrées dans le système étaient poissonniennes, quel théorème pourrait-on utiliser ?
Quels seraient alors le degré de multiprogrammation et le temps de réponse du système central, pour le débit et les demandes de service obtenues par mesures.
Conclusion : les entrées sont-elles poissonniennes ?

4- On décide de modéliser le système central avec un réseau fermé avec M interactions. En considérant le cas $M = 4$ et les demandes de service mesurées, calculer pour le modèle fermé le temps de réponse et le débit du système central. On peut appliquer le théorème de Gordon et Newell.
On pourra refaire le calcul en utilisant l'algorithme de Reiser. Compte tenu des symétries du problème, aurait-il été possible de n'appliquer l'algorithme de Reiser qu'en partant du bas de la colonne correspondante à K=3 ?
Conclusion : le modèle fermé est-il valable ?
Quelle est la durée d'une entrée/sortie (attente + service) ?

5- On suppose qu'avec un degré de multiprogrammation limité à 2, le nombre d'entrées/sorties par interaction est réduit de moitié. On suppose que la demande totale au CPU est inchangée et la file WAIT jamais vide.
Evaluer le temps de réponse qu'aurait le système central dans cette nouvelle situation ?
Calculer le taux d'occupation CPU et le taux de recouvrement CPU/disque (probabilité pour que ces deux unités soient actives simultanément).
Conclusion : cette nouvelle configuration donne-t-elle de meilleures performances ? On réfléchira pour voir s'il vaut mieux comparer les débits ou les temps de réponse des deux configurations.

5.2 Du choix du point où l'on compte le débit global dans un réseau fermé

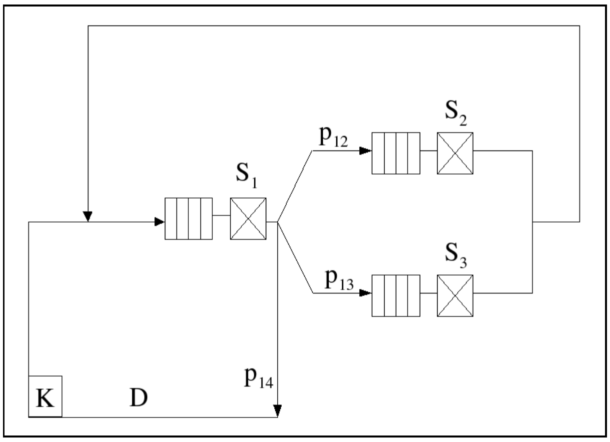
On considère le réseau suivant. Les arrivées sont supposées poissonniennes, les temps de service exponentiels, la discipline de service PAPS, les files infinies et les routages probabilistes.



1- Déterminer les nombres moyens de passages par chacune des files. Le réseau est-il stable ? Déterminer son temps de réponse.

2- On ferme le réseau sur lui-même et l'on suppose qu'il y a au plus $K = 2$ clients à l'intérieur. Quel est le temps moyen entre deux passages successifs d'un client donné par la station 2 ? Quel est le temps moyen entre deux passages de clients successifs (eventuellement différents) ? Quel est le débit au point D ?

Applications Numériques :
$\lambda = 0,5$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 4$, $p_{12} = 1/2$, $p_{13} = 1/3$, $p_{14} = 1/6$, $(E[S_i] = 1/\mu_i,\ 1 \leq i \leq 3)$.



5.3 Théorème de Jackson et Analyse Opérationnelle

On considère un système comportant une Unité Centrale et deux disques sur lequel on a fait les mesures suivantes :
. Durée de la mesure : 1800 s ;
. Durée totale d'utilisation UC : 1440 s ;
. Nombre de transactions traitées : 720 ;
. Nombre total d'accès au disque 1 : 36000 ;
. Nombre total d'accès au disque 2 : 18000 ;
. Durée d'un accès au disque 1 : 40 ms ;
. Durée d'un accès au disque 2 : 100 ms.
On fait les hypothèses suivantes :
. Arrivées exponentielles ;
. Services exponentiels ;
. Accès probabilistes ;
. Indépendance entre les services ;
. Files infinies et politique PAPS.
1- Calculer le temps de réponse moyen du système, le taux d'occupation de l'UC et le taux de recouvrement UC/disque.
2- La durée d'un accès au disque 2 est maintenant de 10 ms. Calculer le temps de réponse moyen du système, le taux d'occupation de l'UC et le taux de recouvrement UC/disque.

5.4 Réseau local

On considère le réseau local comportant N ($N = 6$) terminaux, un serveur (CPU) et m ($m = 2$) disques. Le serveur et les disques fournissent des traitements qui seront supposés exponentiels et appliquant une politique PAPS. Leurs files d'attente ont au moins une capacité N. La consommation CPU est de 5 s. Une interaction fait en moyenne 500 appels à chacun des disques dont le temps de service est $E[S]$ ($E[S] = 10\,ms$). Le temps de réflexion est de 10 s.

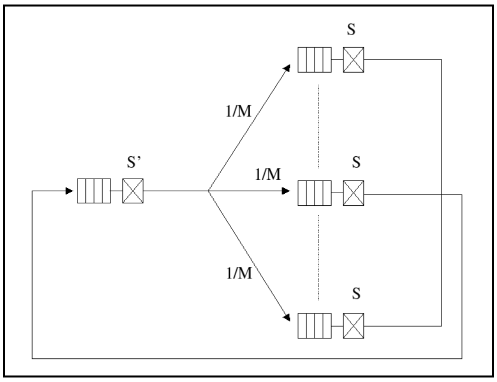
1- Quel théorème peut-on utiliser ?
2- Appliquer l'algorithme de Reiser pour calculer le temps de réponse de ce réseau.

Chapitre 6

Méthodes d'agrégation

6.1 Réseau symétrique

On considère un ensemble de M stations identiques, avec un serveur exponentiel pour chacune, dont le temps de service moyen est $E[S] = 1/\mu$. Il y a équirépartition des accès, les clients sont envoyés par une source exponentielle. On modélise l'ensemble sous la forme d'un réseau fermé avec N clients.



On utilise une méthode d'agrégation. Calculer le taux $\mu(n)$ du serveur équivalent à l'ensemble des M stations, en utilisant la récurrence Mean Value Analysis (algorithme de Reiser) en fonction de n, M et $E[S]$.

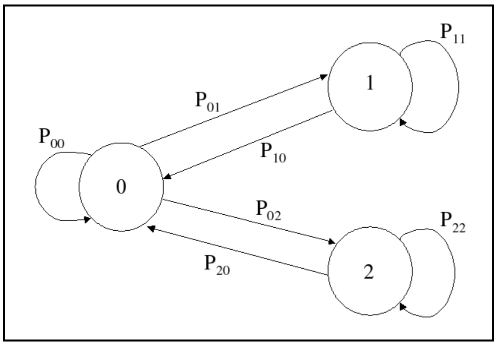
6.2 Agrégation de chaînes de Markov

On considère la chaîne de Markov suivante qui modélise le trafic en entrée d'une file de sortie d'un commutateur ATM. La source peut se trouver dans trois états :

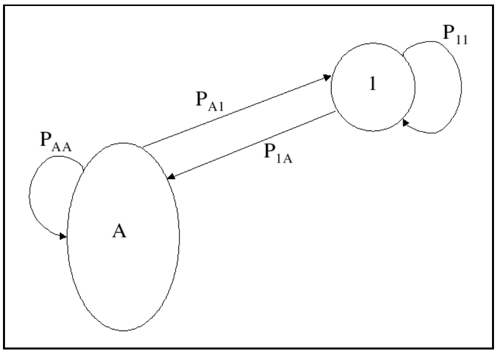
- 0 : silence
- 1 : rafale envoyée vers la sortie qui nous intéresse
- 2 : rafale envoyée vers une autre sortie

On a donc une chaîne de Markov à temps discret dont les probabilités de transitions sont les suivantes :

$$P_{00} = 1/8, \quad P_{02} = 5/8, \quad P_{10} = P_{20} = 1/8$$



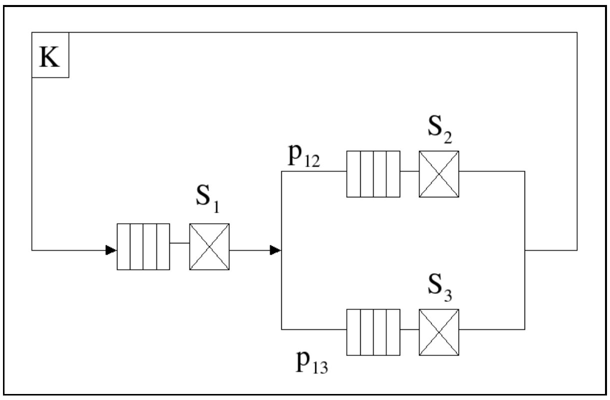
1- Calculer P_{01}, P_{11} et P_{22}.
2- Calculer les probabilités des trois états.



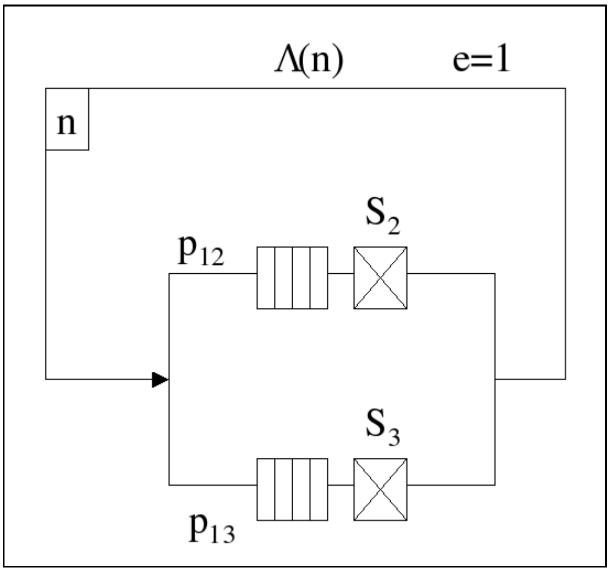
3- On veut agréger les deux états 0 et 2 en un état A. On souhaiterait maintenir la bonne valeur pour $P(1)$ et obtenir $P(A) = P(0) + P(2)$ Quelles probabilités de transitions faudrait-il prendre pour P_{A1} et P_{1A} ? Cette agrégation est-elle exacte ?

6.3 Agrégation de files d'attente

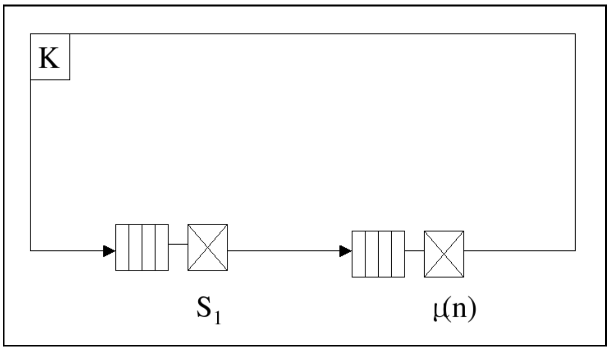
Soit un réseau fermé comportant trois stations. Les services sont exponentiels, les capacités des files infinies ou au moins égales à K, le nombre de clients dans le réseau. La discipline est PAPS et les routages probabilistes.
On veut trouver le taux d'utilisation du serveur 1 pour $K = 1, 2, 3, 4$, en utilisant une méthode d'agrégation.



1- Considérer le sous-réseau suivant et déterminer le débit $\Lambda(n)$.



2- Considérer le réseau comportant la station 1 et la file composite dont le service dépend du nombre n de clients dans cette file et est exponentiel de paramètre $\mu(n)$ avec $\mu(n) = \Lambda(n)$. Calculer alors le taux d'utilisation du serveur 1.



Applications Numériques : $E[S_1] = 10$, $E[S_2] = 100$, $E[S_3] = 25$, $p_{12} = 0,2$, $p_{13} = 0,8$.

Chapitre 7

Exercices non corrigés

7.1 Etude de la transformée en z

Etant donnée une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*_- \quad f_n = 0$, on définit la fonction génératrice (z-transform en anglais) de la variable réelle ou complexe z par :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

1- Lorsque les f_n sont des probabilités d'états $\pi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$, montrer que F est analytique sur le disque unité puis calculer $F(1)$.

2- Calculer les fonction génératrices associées aux suites suivantes, en fonction de F, fonction génératrice associée à (f_n) et G, fonction génératrice associée à (g_n) :

a- $(af_n + bg_n)$
b- $(a^n f_n)$
c- $(f_{n/k})$ pour $n = pk$, $p \in \mathbb{N}$
d- (f_{n+1})
e- (f_{n+k}) pour $k > 0$
f- (f_{n-1})
g- (f_{n-k}) pour $k > 0$
h- (nf_n)
i- $(n(n-1)(n-2)...(n-m+1)f_n)$ pour $m > 1$
j- $(f_n * g_n)$ où $*$ est un produit de convolution
k- $(f_n - f_{n-1})$
l- $(\sum_{k=0}^{n} f_k)$

3- Calculer les fonctions génératrices associées aux suites suivantes :

a- $f_0 = 1, f_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
b- $f_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
c- $f_n = A\alpha^n$
d- $f_n = n\alpha^n$
e- $f_n = n^2\alpha^n$
f- $f_n = \dfrac{1}{m!}(n+m)(n+m-1)...(n+1)\alpha^n$
g- $f_n = \dfrac{1}{n!}$

4- Démontrer que :

$$f_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}F(z)\right)_{z=0}$$

Considérons le processus $N(t)$, nombre de clients dans une file à l'instant t, les probabilités d'états limites stationnaire sont :

$$\pi(n) = \lim_{t\to\infty} P[N(t) = n]$$

Utilisons les définitions classiques du cours :

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi(n)$$

$$E[N^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\pi(n)$$

Démontrer que :

$$L = \left(\frac{dF(z)}{dz}\right)_{z=1}$$

$$E[N^2] - E[N] = \left(\frac{d^2}{dz^2}E\left[z^N\right]\right)_{z=1}$$

5- On considère une file avec des arrivées Poissonniennes de taux λ de groupes de 2 clients, un serveur exponentiel de taux μ, service FIFO, capacitée infinie, population infinie.
a- Montrer que le nombre de clients dans cette file est un processus de Markov à temps continu.
b- Faire un schéma de la Chaîne de Markov à temps continu.
c- Ecrire les équations obtenues en coupant entre k et $k+1$.
d- Multiplier cette équation par z^k et additionner toutes les équations. En déduire l'espérance et la variance du nombre de clients dans la file.

7.2 Etude de la file M/GI/1

Etant donnée une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*_- \quad f_n = 0$, on définit la fonction génératrice (z-transform en anglais) de la variable réelle ou complexe z par :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

1- Lorsque les f_n sont des probabilités d'états $\pi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$, montrer que F est analytique sur le disque unité puis calculer $F(1)$.

2- Si les f_n sont les probabilités d'états du processus nombre de clients dans une file, exprimer l'esperance de la longueur de la file en fonction de $F(z)$.

3- Considérons le processus $\{X_k\}_{k\geq 1} = \{n(t_k)\}_{k\geq 1}$ nombre de clients juste après le départ du k-ième client dans une file M/GI/1. Montrer que ce processus est une CMTD.
4- Soit α_c la probabilité pour que c clients soient arrivés durant le temps de service du $(k+1)$-ième client.
Montrer que si f_S est la densité de probabilité du service :

$$\alpha_c = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^c}{c!} e^{-\lambda x} f_S(x)dx$$

Soit $\pi(n)$ la probabilité limite stationnaire d'état de la chaîne définie à la question 3 et $p_{i,j}$ la probabilité de transition de l'état i vers l'état j.
5- Vérifier que $p_{i,j} = \alpha_{j-i+1}$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i-1$ et que $p_{0,j} = \alpha_j$ pour $j \geq 0$.

6- On veut résoudre le sytème $\pi = \pi P \quad (1)$.
On définit les transformées en z des $\pi(n)$ et des α_j qu'on appelle $F(z)$ et $V(z)$. Montrer à partir de (1) que :

$$F(z) = \frac{\pi(0)V(z)(1-z)}{V(z)-z}$$

7- Déterminer $\pi(0)$ de deux manières différentes
8- Questions "bonus" :
a- Démontrer que le nombre moyen de clients est :

$$L = \rho + \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

avec C_s le coefficient de variation du temps de service.
b- En déduire les autres paramètres de performance.
c- Donner alors les paramètres de performance pour les files M/M/1, M/D/1 et M/E_k/1.

Chapitre 8

Corrigés

Modèle du dentiste

1- Pour chaque client, on a $R = W + S$. Ce résultat est donc vrai en terme d'espérance.
2- Pour chaque client, on a $L = L_W + L_S$. Ce résultat reste donc vrai en terme d'espérance.
3- Le nombre de clients en train d'être servis est de 1 avec la probabilité U et de 0 avec la probabilité $1 - U$. On a donc :

$$E[L_S] = 0 * (1 - U) + 1 * U$$

d'où $E[L_S] = U$.
4- En multipliant l'équation (1) par Λ, on a : $E[R] * \Lambda = E[S] * \Lambda + E[W] * \Lambda$.
En appliquant la loi de Little aux systèmes global, file seule puis serveur seul, on a :

$$E[L] = E[R] * \Lambda, \quad E[L_W] = E[W] * \Lambda \quad et \quad E[L_S] = E[S] * \Lambda$$

L'équation (2) vient immédiatement.
La relation connue entre U, Λ et $E[S]$ s'obtient en utilisant le résultat obtenu en appliquant la loi de Little au serveur et celui de la question 3. On a alors :

$$U = E[S] * \Lambda$$

5- L'énoncé donne $E[L] = 2.8$ client, $E[L_W] = 2$ client et $\Lambda = 4$ clients par heure. On en déduit :
- En moyenne, le nombre $E[L_s]$ de clients soignés est 0.8, ce qui revient à dire que le denstiste est occupé à 80% du temps.
- De plus, aller chez le dentiste occupe pendant $E[R] = \frac{E[L]}{\Lambda} = \frac{2.8}{4} = 0.7$ heure, c'est à dire 42 minutes.
- Plus précisément, on passe $E[W] = \frac{E[L_W]}{\Lambda} = 2/4 = 0.5$ heure dans la salle d'attente, c'est à dire 30 minutes.
- On en déduit que le dentiste nous soigne en 12 minutes...

Temps d'attente d'un train

1- $E[X] = 0.9 * 6 + 0.1 * 54 = 10.8$ soit 10 minutes 48 secondes.
2- Sur 100 intervalles de temps, il y a en moyenne 90 intervalles courts de 6 minutes qui durent 540 minutes et 10 intervalles longs de 54 minutes qui durent 540 minutes. Donc sur 1080 minutes, il y en a 540 qui correspondent à des intervalles courts et 540 qui correspondent à des intervalles longs. Donc pour un voyageur qui arrive à un instant quelconque, il a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'arriver pendant un intervalle court (et pas du tout 90%) et $\frac{1}{2}$ d'arriver pendant un intervalle long.
a- Si on arrive pendant un intervalle court, il faudra attendre 3 minutes en moyenne. Si on arrive pendant un intervalle long, on attendra 27 minutes en moyenne. Donc $E[Y] = \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * 27 = 15$ minutes.

b- On peut écrire la formule de Pollaczek Khintchine qui donne le temps d'attente résiduel en fonction du temps d'attente : $E[Y] = E[X] * \frac{1 + C^2(X)}{2}$, qui donne le même résultat :

$$\begin{aligned} Var[X] &= 0.9[6 - 10.8]^2 + 0.1[54 - 10.8]^2 \\ &= 207,3 \end{aligned}$$

$$C^2[X] = \frac{Var[X]}{E^2[X]} = \frac{207.36}{10.8^2} = 1.7777$$

d'où : $E[Y] = 15$ minutes
3- On constate que $E[Y] > E[X]$, c'est le paradoxe de l'auto-stoppeur.

Etude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

1- Une chaîne est irréductible si tout état peut-être atteint (en un nombre fini) de pas. Il est clair que si $\alpha = 0$, alors l'état 3 est absorbant. D'autre part, si $p = 0$, le couple d'états $(1, 2)$ est absorbant.

Supposons que $\alpha \neq 1$. Il existe alors une boucle sur l'état 3 et la chaîne est donc apériodique.

Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Si $p \neq 1$, il existe alors un circuit de longueur 2 et un circuit de longueur 3. La chaîne est donc apériodique. Si $p = 1$, il n'y a plus qu'un seul circuit de longueur 3 et la chaîne est périodique.

Les condition d'irréductibilité et d'apériodicité sont données par :

$$0 < \alpha \leq 1 \quad 0 < p \leq 1 \quad \alpha p \neq 1$$

2- Les probabilités à l'équilibre sont déterminées en résolvant l'équation $\Pi = \Pi P$, ce qui donne :

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{\alpha}{2\alpha + p} \quad \pi_3 = \frac{p}{2\alpha + p}$$

3- L'équiprobabilité est obtenue lorsque $p = \alpha$, ce qui impose donc que $0 < p = \alpha < 1$.
4- Cette question peut être résolue en utilisant deux méthodes différentes :
Méthode 1
Notons $f_{i,i}^{(n)}$ la probabilité de retour en i en exactement n étapes.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f_{2,2}^{(1)} &= 0 \\ f_{2,2}^{(2)} &= 1 - p \\ f_{2,2}^{(i)} &= p(1-\alpha)^{i-3}\alpha \end{aligned}$$

Notons M_2 le temps moyen de retour en 2. On a alors :

$$\begin{aligned} M_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} i * f_{1,1}^{(i)} \\ &= 2(1-p) + \sum_{i=3}^{\infty} ip\alpha(1-\alpha)^{i-3} \\ &= 2(1-p) + 3p\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i + p\alpha \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\alpha)^i \\ &= 2(1-p) + p\alpha \frac{1}{\alpha} + p\alpha \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha + p}{\alpha} \end{aligned}$$

Méthode 2
On utilise directement la formule :

$$M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{2\alpha + p}{\alpha}$$

Conclusion
Le temps moyen de premier retour en 2 est de : $\dfrac{2\alpha + p}{\alpha}$

Processus de naissance et de mort

Condition nécessaire pour que les états soient récurrents non nuls
Nous savons que si il y a convergence, le systeme $\Pi P = \Pi$ admet une solution non nulle. Dans le cas contraire, la seule solution est la solution nulle. Il est donc nécessaire et suffisant de trouver une solution non nulle pour prouver qu'il y a convergence.
Coupes
Pour tous les états $n \in \mathbb{N}$, on a : $p * P(n) = q * P(n+1)$, d'où, en posant $\rho = \dfrac{p}{q}$:

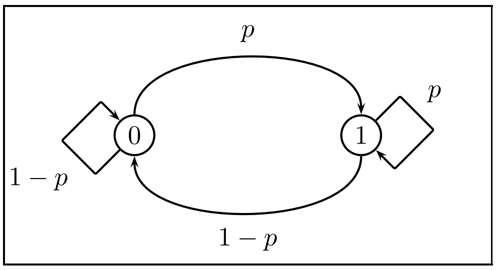
$$P(n) = P(0)\left(\frac{p}{q}\right)^n = P(0)\rho^n$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver $P(0)$ non nul tel que la somme de tous les P(n) soit égale à 1 est $p < q$. La série $\sum_{i=1}^{N} P(i)$ converge alors quand N tend vers l'infini.
$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = P(0)\dfrac{1}{1-\rho} = 1$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison ρ) d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = (1-\rho)\rho^n}$$

Modèles de trafic sur un lien

1- Trafic de Bernoulli **a-** Ce processus est Markovien car la seule connaissance de l'état présent permet de décrire la loi du futur. Plus précisément, il n'y a même pas besoin ici de connaître l'état présent pour connaître la loi du futur.
On peut donc modéliser $Z(t)$ par une chaîne de Markov dans laquelle les deux flèches arrivant à l'état 1 sont p et les deux autres, arrivant à l'état 0 sont $1-p$.

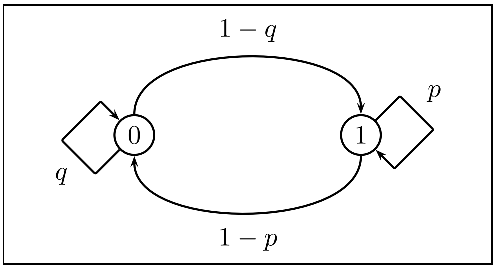


b- Si P est la matrice de transition et Π le vecteur de probabilités des états. En écrivant que $\Pi = \Pi P$ ainsi que la condition de normalisation, on a :

$$\pi_0 = 1 - p \quad et \quad \pi_1 = p$$

Le débit des cellules est égal à la probabilité π_1 : $\Lambda = \pi_1$.
Le temps T séparant deux cellules a pour espérance le temps moyen de premier retour en 1. C'est donc $E[T] = \dfrac{1}{p}$.
2- Trafic Bursty Geometric
a- Il suffit d'écrire les probabilités de transition :

$$\begin{array}{ccc} P[X(t+1)=0/X(t)=0] = q & \text{et} & P[X(t+1)=1/X(t)=0] = 1-q \\ P[X(t+1)=0/X(t)=1] = 1-p & \text{et} & P[X(t+1)=1/X(t)=1] = p \end{array}$$



b-
Probabilités stationnaires
Pour calculer les probabilités stationnaires, on écrit la matrice $P = (P_{i,j})_{(i,j)=(0,1)}$ de transition et on résoud $\Pi P = \Pi$. On trouve :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1-p}{2-p-q} \text{ et } \pi_1 = \frac{1-q}{2-p-q}}$$

Débit des cellules
Le débit des cellules est π_1 :

$$\boxed{\Lambda = \frac{1-q}{2-p-q}}$$

Calcul de la durée d'un silence
Méthode 1
Supposons que nous sommes au début du silence. On y reste encore pendant i "période de temps" (la durée du silence $E[L_S]$ sera $i+1$) avec la probabilité $q^i(1-q)$: $P[L_S = i+1] = q^i(1-q)$.
D'où $E[L_S] = \sum_{i=0}^{\infty} q^i(1-q)(i+1) = \frac{1}{1-q}$.
Méthode 2
On a directement le temps de séjour en 0 : $E[L_S] = \frac{1}{1-P_{0,0}} = \frac{1}{1-q}$
*C*onclusion
La durée d'un silence est de $E[L_S] = \frac{1}{1-q}$, celle d'une rafale est de $E[L_R] = \frac{1}{1-p}$.
Calcul de la durée de temps séparant deux cellules
Pour déterminer les deux premiers moments du temps séparant deux cellules, deux méthodes s'offrent à nous. La plus rapide est de dire que cette durée est de :

$$M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{2-p-q}{1-q}$$

c- Un processus Bursty Geometric est un processus de Bernoulli quand $q = 1-p$
3- Trafic Interrupted Bernoulli Process (IBP) Les rafales sont celles du processus Brusty Geometric mais il n'y a pas nécessairement une cellule à chaque slot d'une rafale. Pendant la rafale, il y a un cellule dans un slot avec la probabilité α. On a :

$$\begin{array}{rcl} P[Y(t)=1/X(t)=1] & = & \alpha \\ P[Y(t)=0/X(t)=1] & = & 1-\alpha \\ P[Y(t)=0/X(t)=0] & = & 1 \\ P[Y(t)=1/X(t)=0] & = & 0 \end{array}$$

a- $Y(t)$ n'est pas Markovien car la seule connaissance de $Y(t)$ ne permet pas de prédire le futur :
Si $Y(t) = 1$
Nous savons alors que nous somme dans une rafale. Nous savons alors que $Y(t+1) = 1$ avec la probabilité $p\alpha$. Nous savons aussi que $(t+1) = 0$ avec la proba $1-p+p(1-\alpha)$. $Y(t) = 1$ permet donc de prédire le futur.
Si $Y(t) = 0$
Nous ne savons pas si nous sommes dans un silence ou non.

- Si nous nous trouvons dans un silence, alors $Y(t+1)=0$ avec la proba $q+(1-q)(1-\alpha)$ et $Y(t+1)=1$ avec la proba $(1-q)\alpha$.
- Si nous nous trouvons dans une rafale, alors $Y(t+1)=0$ avec la proba $p(1-\alpha)+(1-p)$ et $Y(t+1)=1$ avec la proba $p\alpha$.

Conclusion
Le processus $Y(t)$ n'est pas Markovien car la seule donnée de la valeur de $Y(t)$ à un instant donné ne permet pas de prédire la valeur de $Y(t)$ à l'instant suivant.
b- Les longueurs moyennes des silences et des rafales restent inchangées. En revanche, le débit des cellules n'est plus le même. En effet, pendant un slot, il y a une cellule avec la probabilité $\alpha\pi_1$ et il n'y en a pas sinon. Le débit devient donc :

$$\boxed{\Lambda = \alpha\pi_1 = \frac{\alpha(1-q)}{2-p-pq}}$$

Processus de Poisson

1-
Pour $k=0$

$$\begin{aligned} P_0(t+dt) &= P[K(t+dt)=0] &= P[K(t)=0]*P[K(t+dt)=0/K(t)=0] \\ & &= P_0(t)*(1-\lambda dt) \end{aligned}$$

d'où : $P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t)$
Pour $k>0$

$$\begin{aligned} P_k(t+dt) &= P[K(t+dt)=k] &= P[K(t)=k]*P[K(t+dt)=k/K(t)=k] \\ & & +P[K(t)=k-1]*P[K(t+dt)=k/K(t)=k-1] \\ & &= P_k(t)*(1-\lambda dt)+P_{k-1}(t)*\lambda dt \end{aligned}$$

d'où : $P_k^{'}(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)$
Les équations différentielles permettant d'étudier la famille de fonctions sont :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} P_0'(t)+\lambda P_0(t) &=& 0 \\ P_k'(t)+\lambda P_k(t) &=& \lambda P_{k-1}(t) \end{array} \right.}$$

2- Il suffit de résoudre les équations différentielles précédentes pour répondre à la question.
Pour $k=0$
En sachant que $P_0(0)=1$, il vient :

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Pour $k>0$
Il suffit de procéder par récurrence que $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ pour $k \in \mathbb{N}$:
- Pour k=0, c'est déjà démontré
- Supposons le résultat vrai pour un certain k et démontrons la formule en $k+1$
  Nous pouvons rechercher $P_{k+1}(t)$ sous la forme $K(t)e^{-\lambda t}$. On a donc

  $$P_{k+1}'(t) = (K'(t)-\lambda K(t))e^{-\lambda t}$$

  En utilisant alors la formule de récurrence, on en déduit que $K'(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ d'où $K(t) = \dfrac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} + C$. En utilisant la condition initiale $P_{k+1}(0)=0$, il vient :

  $$P_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda t}$$

  ce qui établie la propriété au rang $k+1$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}}$$

3-
Calcul de $E[K(t)]$

$$\begin{aligned} E[K(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

$$\boxed{E[K(t)] = \lambda t}$$

Calcul de $E[K(t)(K(t)-1)]$
En utilisant le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E[K(t)(K(t)-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= (\lambda t)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{E[K(t)(K(t)-1)] = (\lambda t)^2}$$

Calcul de $E[K^2(t)]$

$$E[K^2(t)] = E[K(t)(K(t)-1) + K(t)] = E[K(t)(K(t)-1)] + E[K(t)] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Calcul de $Var[K(t)]$

$$\boxed{Var[K(t)] = E[K^2(t)] - E[K(t)]^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t}$$

4-
Fonction de répartition du temps séparant deux arrivées
Nous pouvons raisonner à partir du temps 0 et rechercher la probabilité qu'un évènement arrive avant t.
Soit $\hat{t}$ le temps séparant deux arrivées. Nous cherchons $P[\hat{t} < t] = 1 - P[\hat{t} >= t] = 1 - P[K(t) = 0]$ d'oû :

$$\boxed{P[\hat{t} < t] = 1 - e^{-\lambda t}}$$

Densité de probabilité
La densité de probabilité de $\hat{t}$ est la dérivée de la fonction de répartition de $\hat{t}$:

$$\boxed{f_{\hat{t}} = \lambda e^{-\lambda t}}$$

Espérance mathématique
L'espérance mathématique de $\hat{t}$ est, en intégrant par partie :

$$\boxed{E[\hat{t}] = \int_{t=0}^{\infty} t f_{\hat{t}}(t)dt = \frac{1}{\lambda}}$$

La moyenne du temps séparant deux arrivées est donc l'inverse du paramètre de Poisson de la loi d'arrivée... On a donc deux définitions pour les lois de Poisson : celle donnée à la première question du sujet et celle qui caractérise le temps entre deux arrivées $\hat{t}$.

Modele du réparateur

Nous considérons une chaîne de Markov à K états. L'état i est atteint lorsque i machines parmi les K sont en pannes.

1-

Lemme sur la loi de l'inf de n variables indépendantes de loi exponentielle Soit n variables aléatoires indépendantes X_i de loi exponentielle de paramètre λ_i.

$$\begin{aligned} P[Inf(X_i) \leq x] &= 1 - P[Inf(X_i) > x] \quad \text{(Passage au complémentaire)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > x] \quad \text{(Indépendance des variables)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} \\ &= 1 - e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x} \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers 0, nous avons donc :

$$P[Inf(X_i) \leq x] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x + o(x)$$

Expression du taux de passage de l'état n à l'état $n+1$

Nous supposons donc qu'il y a $K-n$ machines en état de marche. Soit X_i le temps qui sépare l'instant courant de la panne de la machine i. La première machine tombera en panne au bout d'un temps $Inf(X_i)$.

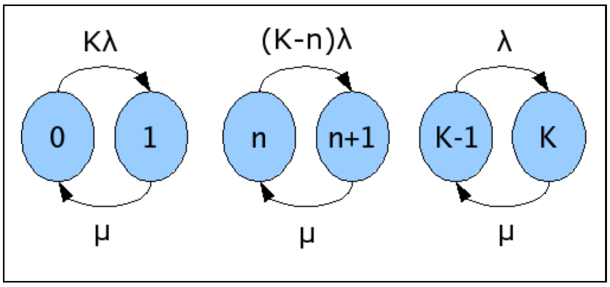
La probabilité de passer de l'état n à l'état $n+1$, c'est à dire P[X(t+dt)=n+1 / X(t+dt)=n] est donc :

$$\boxed{P[X(t+dt) = n+1/X(t) = n] = (K-n)\lambda dt + o(dt)}$$

Expression du taux de passage de l'état $n+1$ à l'état n

$$\boxed{\text{Le réparateur est exponentiel et l'on passe donc de l'état } n+1 \text{ à l'état } n \text{ avec le taux } \mu.}$$

2- On a bien un procesus sans mémoire, qui de plus, évolue uniquement par saut de 1 ou -1. C'est donc un processus de naissance et de mort.



On a donc :

$$P(n) = \frac{\lambda(0)\lambda(1)...\lambda(n-1)}{\mu(1)\mu(2)...\mu(n)} P(0) = \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P(0)$$

La probabilité d'avoir K machines en pannes est donc :

$$P(K) = \frac{K! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{\sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

soit :

$$P(K) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \frac{1}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-K}}$$

d'où en réindexant (n=K-n) :

$$\boxed{P(K) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-n}}}$$

3- On trouve : $\boxed{P(7) = 4.7\ 10^{-11}}$.

Unité de transmission à capacité limitée

On suppose que les messages forment un trafic poissonnien, de débit moyen 2 messages par seconde. La durée de transmission est constante $E[S] = 400\, ms$ et on néglige les erreurs de transmission. Quelle doit être la capacité du nœud de transmission pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-3} ?

Il y a rejet que si et seulement si la file à capacité limitée est pleine.
En faisant une coupe, on obtient $P(n) = (\lambda S)^n P(0)$ d'où en utilisant l'équation de normalisation :

$$\forall n \in [0..N] \quad P(n) = \frac{(\lambda E[S])^n}{\sum_{i=0}^{N} (\lambda E[S])^i}$$

soit, en posant $\rho = \lambda S$:

$$\forall n \in [0..N] \quad P(n) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n$$

La probabilité de rejet est donc :

$$\boxed{P_{rejet} = P(N) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N}$$

On en déduit alors N pour que $P_{rejet} < 10^{-3}$: $\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N < 10^{-3}$ équivaut à $x - \rho x < 10^{-3}$ en posant $x = \rho^N$. Soit $x < \frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}$ d'où $\rho^N < \frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}$. Il faut passer ensuite au logarithme : $N ln(\rho) < ln\left(\frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}\right)$, d'où, puisque $\rho < 1$ et $ln(\rho) < 0$:

$$\boxed{N > \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}\right)}{\ln(\rho)}}$$

On trouve alors : $\boxed{\rho = \lambda E[S] = 0.8 \text{ et } N \geq 24}$

Unité de transmission avec des erreurs de transmission

1- Notons λ_e le flux **d'entrée** dans la file d'attente, λ_s le flux à la **sortie** du serveur, λ_d celui de **départ** du système et λ_r le flux de **rebouclage**.
On a toujours $\lambda_r = p\lambda_s$ et $\lambda_d = (1-p)\lambda_s$, soit aussi : $\lambda_r = \frac{p}{1-p}\lambda_d$.
L'additivité des flux, avant l'entrée dans la file d'attente donne toujours : $\lambda e = \lambda + \lambda_r$.
On a $\lambda_e = \lambda e$, de par la définition de e.
Il existe au moins quatre façons de trouver le nombre moyen de passages e dans le système {file d'attente ; serveur} :
Stationnarité du système {file d'attente ; serveur}
Sous cette hypothèse, le flux de sortie du serveur est égal à λe : $\lambda_s = \lambda_e$. On a donc $\lambda_r = p\lambda e$.
En utilisant l'additivité des flux, nous pouvons écrire $\lambda e = \lambda + p\lambda e$ et résoudre en e.
Stationnarité du système {file d'attente ; serveur ; rebouclage}
Sous cette hypothèse, le flux de départ du système est égal à λ : $\lambda_d = \lambda$, d'où $\lambda_r = \frac{p}{1-p}\lambda$
En utilisant l'additivité des flux, nous pouvons écrire $\lambda e = \lambda + \frac{p}{1-p}\lambda$ et résoudre en e.
Espérance de e
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passages d'un client dans le système {file

d'attente ; serveur}.
Un client passe exactement k fois dans la file avec la probabilité $p^{k-1}(1-p)$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P[X=k] = p^{k-1}(1-p)$$

L'espérance de E est donc :

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1-p) = (1-p)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{d(x^i)}{dx}\right)_{x=p} = (1-p)\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right)_{x=p}$$

Sommer les p^k
On passe une fois avec la probabilité 1, une deuxième avec la probabilité p, une troisième p^2, etc. D'où le résultat en sommant p^k de $k=0$ à l'infini.
Conclusion Le nombre moyen de passages e dans la file est :

$$\boxed{e = \frac{1}{1-p}}$$

2- Nous pouvons considérer le système complet {file d'attente ; serveur ; rebouclage} et y appliquer la loi de Little : $L = E[R]\lambda$ où L est le nombre de client dans le système complet.
Soit $N(t)$ le processus indiquant le nombre de client dans le système complet. Le processus d'arrivée dans le système est poissonnien. Un client ne quitte le système qu'après un service exponentiel et avec la probabilité (1-p). $N(t)$ est donc Markovien.
Un seul client ne peut arriver pendant dt et ceci se produit avec la probabilité $\lambda dt + o(dt)$. Un seul client ne peut sortir du système pendant dt, et ceci avec la probabilité $\mu(1-p)+o(dt)$. C'est donc un processus de naissance et de mort. En posant $\rho = \frac{\lambda}{(1-p)\mu} = \frac{\lambda}{1-p}E[S]$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

d'où $L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \frac{\rho}{1-\rho}$. On a donc :

$$\boxed{L = \frac{\lambda E[S]}{1-p-\lambda E[S]}}$$

Conclusion et applications numériques
En utilisant la loi de Little sur le système entier, on obtient :

$$\boxed{E[R] = \frac{E[S]}{1-p-\lambda E[S]}}$$

On trouve $L=8$ et $E[R]=4s$.
Remarque
On peut aussi considérer cela comme un réseau de Jackson à une seule file avec $e = \frac{1}{1-p}$.

Etude de la file M/M/C/C

1- Soit $N(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t.
$N(t)$ est markovien car la seule connaissance de $N(t)$ permet de prévoir les prochains départs de clients (temps résiduel de service exponentiel), la prochaine arrivée de client (temps résiduel de service exponentiel).

$N(t)$ est un processus de naissance et de mort si les seules transitions possibles se font entre les états voisins :

La probabilité qu'il y ait k arrivées pendant un intervalle de temps T est $P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$.

On a donc : $\begin{cases} & P_0(dt) &=& e^{-\lambda dt} = 1-\lambda dt + o(dt) \\ & P_1(dt) &=& \frac{\lambda dt}{1!}e^{-\lambda dt} = \lambda dt + o(dt) \\ \forall k>1 & P_k(dt) &=& o(dt) \end{cases}$

Le processus d'arrivée est poissonnien et il ne peut y avoir qu'une seule arrive entre t et $t+dt$.

La probabilité qu'il y ait j départs pour k serveurs occupés pendant un intervalle de temps dt est :

$$Q_j(dt) = C_k^j(\mu dt + o(dt))^j(1 - \mu dt + o(dt))^{k-j}$$

On a donc : $$\begin{cases} & Q_0(dt) & = & 1 - k\mu dt + o(dt) \\ & Q_1(dt) & = & k\mu dt + o(dt) \\ \forall j > 1 & Q_j(dt) & = & o(dt) \end{cases}$$

Le processus $N(t)$ est donc un processus de naissance et de mort. Les taux d'arrivées et de départ sont respectivement λ et $k\mu$ où k est le nombre de serveurs occupés.

2- En écrivant la chaîne de Markov associée à la file et en coupant entre l'état n et $n+1$, nous avons :

$$\forall n \quad \lambda\pi(0) = (n+1)\mu$$

d'où

$$\forall n \quad \pi(n) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0)$$

d'où en écrivant l'équation de normalisation, on obtient :

$$\forall n \quad \pi(n) = \frac{1}{n!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-n}}$$

3- La probabilité qu'un client qui arrive soit rejeté est la probabilité que la file soit pleine, c'est à dire :

$$P_{rejet} = \frac{1}{C!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-C}}$$

4- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$L = E[N] == \sum_{n=0}^{C} n\pi(n) = \sum_{n=0}^{C} n\frac{1}{n!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-n}} = \rho(1 - p_{rejet})$$

Le temps moyen de réponse $E[R]$ est égal à $E[W] + E[S]$ avec ici $E[W] = 0$ (pas d'attente).

On peut écrire que $E[S] = \frac{1}{\mu}$ (temps moyen de service) d'où $E[R] = \frac{1}{\mu}$.

Une autre solution est d'appliquer la loi de Little au système des serveurs. On a $E[L] = E[S]\Lambda$ où Λ est le débit entrant dans ce système. Ici, nous avons vu que $\Lambda = (1 - p_{rejet})\lambda$ d'où $E[R] = E[S] = \dfrac{L}{\Lambda} = \dfrac{\rho}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu}$.

File à Serveurs Hétérogènes

1- Serveurs homogènes

a- C'est une file à arrivées poissonniennes de taux λ (On écrit M car Markovien), à services exponentiels de paramètre μ (M), comportant 2 serveurs. La priorité est celle par défaut, FCFS. Le nombre de place est infini (par défaut) et la population aussi (par défaut).

$$\boxed{\text{La notation de Kendall de la file est M/M/2.}}$$

b- $N(t)$ est Markovien car la seule connaissance de N(t) permet de prévoir les prochains départs de clients (temps résiduel de service exponentiel) ainsi que la prochaine arrivée de client (temps résiduel d'interarrivée exponentiel).

C'est un processus de naissance et de mort et les taux de passage sont :

$$\boxed{\begin{cases} P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] = \lambda dt + o(dt) \quad \forall k \geq 0 \\ P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] = \begin{cases} \mu dt + o(dt) & k = 1 \\ 2\mu dt + o(dt) & \forall k \geq 1 \end{cases} \end{cases}}$$

c- En écrivant la chaîne de Markov associée à la file et en effectuant une coupe on trouve :

$$\forall i \geq 1 \quad \pi_i = 2\rho^i\pi_0 \quad avec \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Il suffit d'écrire l'équation de normalisation pour déterminer π_0. Si la condition de stabilité de la file est vérifiée, $\boxed{\rho < 1}$, on trouve que :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \pi_k = \frac{1-\rho}{1+\rho}2\rho^k}$$

d- Le calcul de L conduit à :

$$\boxed{E[L] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}}$$

En écrivant la loi de Little, on a :

$$\boxed{E[R] = \frac{2}{\mu(1-\rho^2)}}$$

2- Serveurs hétérogènes
a- Le processus $N(t)$ n'est pas Markovien car lorsque $N(t) = 1$, on ne peut pas prédire le passage à l'état 0. En revanche, nous savons que le temps résiduel est exponentiel, mais nous ne connaissons pas son paramètre. En effet, si c'est le premier serveur qui est occupé, alors le paramètre vaut 2μ, si c'est le second, il vaut μ.

$$\boxed{\text{Le processus } N(t) \text{ n'est pas Markovien.}}$$

b- $E(t)$ est un processus Markovien car il permet de savoir dans quel serveur se trouve le client lorsqu'il n'y en a qu'un dans la file. Nous pouvons calculer les probabilités de transition :

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} \forall k > 0 & P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] & = & \lambda dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 0/N(t) = 1'] & = & 2\mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 0/N(t) = 1''] & = & \mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 1'/N(t) = 2] & = & \mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 1''/N(t) = 2] & = & 2\mu dt + o(dt) \\ \forall k > 2 & P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] & = & 3\mu dt + o(dt) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un processus de naissance et de mort, car l'état 2 est relié à trois états différents.}}$$

c- Nous déterminons :

$$\pi_3 = \frac{\lambda}{3\mu}\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_2$$

puis

$$\forall i \geq 0 \quad \pi_{i+2} = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^i \pi_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

En effectuant une coupe autour de l'état 0, nous avons :

$$\lambda\pi_0 = 2\mu\pi_{1'} + \mu\pi_{1''}$$

En effectuant une coupe autour de $1''$, nous avons :

$$(\mu + \lambda)\pi_{1''} = 2\mu\pi_2$$

En effectuant une coupe à gauche de π_2, nous avons :

$$\lambda(\pi_{1'} + \pi_{1''}) = 3\mu\pi_2$$

On en déduit que :

$$\boxed{\pi_0 = 5\pi_2 \quad \pi_{1'} = 2\pi_2 \quad \pi_{1''} = \pi_2}$$

Condition de normalisation :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 = \pi_2 \left[5 + 2 + 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i\right]$$

or $\frac{\lambda}{3\mu} < 1$ donc $\boxed{\text{le système est stable}}$.
On en déduit :

$$\pi_2 = \frac{2}{19},\ \pi_0 = \frac{10}{19},\ \pi_{1'} = \frac{4}{19},\ \pi_{1''} = \frac{2}{19}$$

$$\pi_{k+2} = \frac{2}{19}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

d-
Calcul du nombre de clients

$$E[L] = 0 * \pi_0 + 1 * \pi_{1'} + 1 * \pi 1'' + \sum_{k=2}^{\infty} k\pi_k$$

$$\begin{aligned} E[L] &= \frac{6}{19} + \frac{2}{19}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{6}{19}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

Après avoir calculé la dernière somme, on trouve :

$$\boxed{E[L] = \frac{27}{38}}$$

Calcul du temps de réponse
En appliquant la loi de Little, nous déterminons :

$$\boxed{E[R] = \frac{E[L]}{\lambda} = \frac{27}{38\lambda}}$$

Calcul du taux d'occupation de chacun des serveurs
On a directement :

$$\boxed{U_1 = 1 - \pi_0 - \pi_{1''} = \frac{7}{19}}$$

$$\boxed{U_2 = 1 - \pi_0 - \pi_{1'} = \frac{5}{19}}$$

Temps moyen d'attente $E[W]$

Soit $E[L_W]$ le nombre moyen de clients en attente. Nous avons : $E[L] = E[L_W] + E[L_S]$ où $E[L_S] = E[L_1]+E[L_2]$, avec $E[L_1] = U_1$, $E[L_2] = U_2$. On en conclue que $E[L_W] = E[L]-U_1-U_2 = \frac{3}{38}$.

En appliquant la loi de Little au système sans les serveurs, nous déterminons :

$$\boxed{E[W] = \frac{E[L_W]}{\lambda} = \frac{3}{38\lambda}}$$

Nous pouvons calculer de la même facon le temps $E[S]$:
Soit $E[L_s]$ le nombre moyen de clients en service. Nous avons : $E[L_S] = E[L_1] + E[L_2] = U_1 + U_2$. On en conclue que $E[L_S] = \frac{12}{19}$.
En appliquant la loi de Little au système des deux serveurs, nous déterminons :

$$\boxed{E[S] = \frac{E[L_S]}{\lambda} = \frac{12}{19\lambda}}$$

Proportion de clients servis par chacun des deux serveurs

Soit λ_1 le débit de ceux qui sont traités par le serveur rapide. Soit λ_2 le débit de ceux qui sont traités par le serveur lent. On a $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. De plus, $\lambda_1 = \frac{U_1}{E[S_1]} = 2\mu U_1$ et $\lambda_2 = \frac{U_2}{E[S_2]} = \mu U_2$. Nous pouvons alors déterminer la proportion de clients servis par chaque serveur.

La proportion de clients services par le serveur rapide est :

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{2\mu U_1}{2\mu U_1 + \mu U_2} = \frac{2U_1}{2U_1 + U_2} = \frac{14}{19} = 73,7\%}$$

La proportion de clients services par le serveur lent est :

$$\boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\mu U_2}{2\mu U_1 + \mu U_2} = \frac{U_2}{2U_1 + U_2} = \frac{5}{19} = 26,3\%}$$

Performance d'un étage d'abonnés - File M/M/C/C/N

1- Montrons que la seule connaissance de $N(t)$ suffit à déterminer $N(t+dt)$:

<u>Première méthode</u>

Arrivées

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Le nombre de client en dans la première file est donc : $(N-k)$. Il y a exactement i arrivées (i tel que $k+i \leq C$ puisque le nombre de clients pouvant être servi est limité par C et $i \leq N-k$ puisque le nombre de clients dans la première file est $N-k$) dans la seconde file pendant dt si il y a i fins de service exponentiels de paramètre λ dans la première file et $N-k-i$ clients qui ne finissent pas leur service :

$$\forall i \in [1, C-k] \quad P[N(t+dt) = k+i/N(t) = k] = C_{N-k}^{i}(\lambda dt + o(dt))^i(1 - \lambda dt + o(dt))^{N-k-i}$$

Nous en concluons que :

$$P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] = (N-k)\lambda dt + o(dt)$$

$$\forall i \in [2, C-k] \quad P[N(t+dt) = k+i/N(t) = k] = o(dt)$$

La connaissance de $N(t) = n$ permet donc de prévoir les arrivées entre t et $t+dt$.
Un seul client peut arriver pendant dt et il arrive avec le taux $(N-n)\lambda$.

Départs

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Il y a exactement i départs (i tel que $i \leq k$ puisque le nombre de clients dans la seconde file est k) si il y a i fins de service exponentiels de paramètre μ et $k-i$ clients qui ne finissent pas leur service :

$$\forall i \in [0, k] \quad P[N(t+dt) = k-i/N(t) = k] = C_k^i(\mu dt + o(dt))^i(1 - \mu dt + o(dt))^{k-i}$$

Nous en concluons que :

$$P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] = k\mu dt + o(dt)$$

$$\forall i \in [1, k] \quad P[N(t+dt) = k-i/N(t) = k] = o(dt)$$

La connaissance de $N(t) = n$ permet donc de prévoir les départs entre t et $t+dt$.
Un seul client peut partir pendant dt et il part avec le taux $n\mu$.

<u>Seconde méthode</u>

Arrivées

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Nous savons qu'il ne peut y avoir qu'un seul départ entre t et $t+dt$ de la première file de service exponentiel de paramètre λ (il pourrait y avoir deux départs, mais avec une probabilité en dt^2 infiniment petite par rapport à la probabilité pour qu'il y en est un qui est en dt). Nous savons de plus que ce départ suit la loi de l'inf du temps résiduel des $N-k$ services exponentiels. Il a été démontré que la loi de l'inf de p lois exponentielles de paramètre λ_i est une loi exponentielle de paramètre la somme des λ_i. Ici, nous avons $N-k$ services exponentielles de paramètre λ d'où :

$$P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] = (N-k)\lambda dt + o(dt)$$

Départs

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Nous savons qu'il ne peut y avoir qu'un seul départ de la seconde file entre t et $t + dt$. Ce départ se fait selon la loi de l'inf des k lois résiduelles des clients en service, d'où :

$$P[N(t + dt) = k - 1/N(t) = k] = k\mu dt + o(dt)$$

<u>Conclusion</u>

Le processus $N(t)$ est Markovien. De plus, c'est un processus de naissance et de mort à $C + 1$ états où :

$$\begin{array}{lll} \forall n \in [0, C-1] & \lambda(n) & = & (N-n)\lambda \\ \forall n \in [1, C] & \mu(n) & = & n\mu \end{array}$$

La chaîne de Markov comporte un nombre fini d'états et est fortement connexe. Le processus est donc ergodique.

2- $N(t)$ étant un processus de naissance et de mort, nous avons :

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = \frac{\lambda(0)...\lambda(n-1)}{\mu(1)...\mu(n)} = \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0)$$

Ce qui peut s'écrire, en posant $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$:

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = C_N^n \rho^n \pi(0)$$

Nous déterminons alors les probabilités stationnaires, après avoir utilisé la condition de normalisation :

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = \frac{C_N^n \rho^n}{\sum_{i=0}^{C} C_N^i \rho^i}$$

3- Nous ne pouvons pas appliquer la propriété PASTA ici. Il serait faux d'écrire que la probabilité de rejet est celle d'avoir C clients dans la file, comme nous allons le montrer.

Notons $\Pi_N(C)$ la probabilité que C serveurs soient occupés lorsqu'il y a N clients dans le réseau :

$$\Pi_N(C) = \frac{C_N^C \rho^C}{\sum_{i=0}^{C} C_N^i \rho^i}$$

Calcul du débit au point A : Λ_A

Le débit au point A est :

$$\begin{array}{lll} \Lambda_A & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda\pi(k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda C_N^k \rho^k \pi(0) \end{array}$$

<u>Première méthode</u>

Cette première méthode consiste à suivre les indications du sujet en calculant le débit au point B :

Calcul du débit au point A : Λ_B

Le débit au point B est obtenu en considérant qu'il y a C clients dans la file 2 (avec la probabilité $\pi(C)$. Il y a alors $N - C$ clients dans la 1. Une fois servi dans la file d'attente, il sont tous rejeté, d'où :

$$\begin{array}{lll} \Lambda_B & = & (N-C)\lambda\pi(C) \\ & = & (N-C)\lambda C_N^C \rho^C \pi(0) \end{array}$$

Calcul de la probabilité de rejet

La probabilité de rejet est le rapport entre le débit rejeté et le débit offert :

$$\begin{aligned}P(rejet) &= \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A}\\ &= \frac{(N-C)C_N^C\lambda\rho^C\pi(0)}{\sum_{k=0}^{C}(N-k)\lambda C_N^k\rho^k\pi(0)}\\ &= \frac{(N-C)C_N^C\rho^C}{\sum_{k=0}^{C}(N-k)C_N^k\rho^k}\end{aligned}$$

d'où :

$$P(rejet) = \frac{(N-C)\frac{N!}{(N-C)!C!}\rho^C}{\sum_{k=0}^{C}(N-k)\frac{N!}{(N-k)!k!}\rho^k} = \frac{N\frac{(N-1)!}{(N-1-C)!C!}\rho^C}{\sum_{k=0}^{C}N\frac{(N-1)!}{(N-1-k)!k!}\rho^k} = \frac{C_{N-1}^C\rho^C}{\sum_{k=0}^{C}C_{N-1}^k\rho^k} = \Pi_{N-1}(C)$$

Seconde méthode

Cette seconde méthode consiste à calculer le débit au point E :

Calcul du débit au point E : Λ_E

Le débit au point E est :

$$\begin{aligned}\Lambda_E &= \sum_{k=0}^{C}k\mu\pi(k)\\ &= \sum_{k=1}^{C}k\mu\pi(k)\\ &= \sum_{k=1}^{C}k\mu\frac{N!}{(N-k)!k!}\rho^k\pi(0)\\ &= \sum_{k=1}^{C}\lambda\rho^{k-1}\frac{N!}{(N-k+1)!(k-1)!}(N-(k-1))\pi(0)\\ &= \sum_{k=1}^{C}\lambda(N-(k-1))C_N^{k-1}\rho^{k-1}\pi(0)\\ &= \sum_{k=1}^{C}\lambda(N-(k-1))\pi(k-1)\\ &= \sum_{k=0}^{C-1}\lambda(N-k)\pi(k)\end{aligned}$$

Calcul de la probabilité de rejet

La probabilité de rejet est égale à : $1-\dfrac{\Lambda_D}{\Lambda_A}$. Or $\Lambda_D = \Lambda_E$. Nous déterminons :

$$P(rejet) = 1-\frac{\Lambda_E}{\Lambda_A} = 1-\frac{\sum_{k=0}^{C-1}\lambda(N-k)\pi(k)}{\sum_{k=0}^{C}(N-k)\lambda\pi(k)}$$

soit :

$$P(rejet) = \frac{(N-C)\lambda\pi(C)}{\sum_{k=0}^{C}(N-k)\lambda\pi(k)}$$

En simplifiant, comme dans la première méthode, ceci conduit à

$$P(rejet) = \Pi_{N-1}(C)$$

Conclusion

Dans cet exercice, la propriété PASTA ne s'applique pas. On observe que la probabilité de rejet est égale à la probabilité que l'on aurait eu d'avoir C serveurs occupés si il y avait eu $N-1$ clients et non N.

En réalité, ce résultat n'est pas le seul fruit du hasard. Il s'agit en fait de l'application particulière à ce problème d'un théorème connu sous le nom **Sevcik Mitrani** :

Lorsqu'un client entre dans une file dans un réseau BCMP il voit cette file dans un état qui est en moyenne l'état de la file dans le même réseau fermé mais avec un client de moins au total dans le réseau fermé

Influence de la variance des services et de la loi de priorité

Nous avons : $U_i = \rho_i = \lambda_i E[S_i]$ d'où :

$$U_1 = \rho_1 = 0.25 \text{ et } U_2 = \rho_2 = 0.375$$

Pour calculer U, probabilité que le serveur soit occupé, il suffit d'additionner les probabilités précédentes :

$$U = U_1 + U_2 = 0.625$$

On peut aussi écrire que $U = \rho = \lambda E[S]$ où λ est le débit global et $E[S]$ le temps moyen de service, toutes classes confondues :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2.4 + 1/0.8 = 1.6667 = 1/0.6$$

$E[S]$ est la moyenne des temps de service :

$$E[S] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[S_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[S_2] = 0.375$$

ce qui donne :

$$U = \rho = 0.375/0.6 = 0.625$$

Service PS
Dans ce cas, on a $E[W_i] = E[S_i] \frac{\rho}{1-\rho}$, d'où :

$$E[W_1] = E[S_1] \frac{\rho}{1-\rho} = 1 \text{ et } E[W_2] = E[S_2] \frac{\rho}{1-\rho} = 0.5$$

Pour calculer E[W], il suffit de dire que c'est la moyenne des temps de séjour dans le buffer :

$$E[W] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[W_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[W_2] = 0.625$$

On peut aussi dire que :

$$E[W] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} = 0.625$$

Dans le cas d'un service PS, que les services soient constants ou exponentiels, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1] + E[S_1] & = & 1.6 \\ E[R_2] & = & E[W_2] + E[S_2] & = & 0.8 \\ E[R] & = & E[W] + E[S] & = & 1 \end{array}}$$

Service FCFS

La formule l'attente $E[W_i] = \frac{1}{1-\rho} \sum_{j=1}^{C} \rho_j E[S_j] \frac{1 + C_j^2}{2}$ montre que l'attente dans le buffer est indépendante des classes, mais dépend des carrés des coefficients des services.
Services Constants
On a alors $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = \frac{1}{1-\rho} \frac{\rho_1 E[S_1] + \rho_2 E[S_2]}{2} = 0.35$$

Dans le cas d'un service FCFS avec services constants, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1] + E[S_1] & = & 0.95 \\ E[R_2] & = & E[W_2] + E[S_2] & = & 0.65 \\ E[R] & = & E[W] + E[S] & = & 0.725 \end{array}}$$

Services Exponentiels
Pour une loi exponentielle, le coefficient de variation est 1, soit $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$, d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = \frac{1}{1-\rho} (\rho_1 E[S_1] + \rho_2 E[S_2]) = 0.70$$

Dans le cas d'un service FCFS avec services exponentiels, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1]+E[S_1] & = & 1.3 \\ E[R_2] & = & E[W_2]+E[S_2] & = & 1 \\ E[R] & = & E[W]+E[S] & = & 1.075 \end{array}}$$

Conclusion
Dans le cas d'une discipline FCFS, le temps d'attente dans le buffer est le même pour toutes les classes. Dans le cas d'une discipline PS, cela lisse la variance des services.

Longueur des paquets IP

1- Soit λ_i, $i = (1, 2, 3)$ les taux d'arrivées en octets par secondes de chacun des trois types de paquets. Le débit d'arrivée dans la file de sortie du routeur A est donc : $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Nous savons de plus que ces arrivées suivent une loi poissonnienne de taux Λ, puisque la somme de plusieurs flux poissonniens est poissonnienne.

Les arrivées sont donc poissonniennes, le temps de service S_i est constant ($S_i = \dfrac{l_i}{D}$), la discipline est FCFS, la capacitée est infinie et la population est infinie.
La discipline étant FCFS, le temps d'attente dans le buffer est le même pour toutes les classes (et donc en moyenne) et vaut, puisque le carré du coefficient de variation de ce service est 0 :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{\rho_i S_i}{2}$$

ρ est la charge du serveur, c'est à dire du lien. Il nous reste à déterminer la somme $\sum_{i=1}^{3}\rho_i S_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\rho_i S_i &= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i S_i^2 \qquad\qquad (\text{car } \rho_i = \lambda_i S_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left(\frac{l_i}{D}\right)^2 \\ &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i (l_i)^2 \\ &= \frac{\Lambda}{D^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_i}{\Lambda}(l_i)^2 \\ &= \frac{\Lambda}{D^2}E[L^2] \\ &= \frac{\Lambda}{D^2}(E[L]^2 + \sigma^2[L]) \end{aligned}$$

d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{\Lambda}{2D^2(1-\rho)}(E[L]^2 + \sigma^2[L])$$

Il reste alors à déterminer Λ. Nous pouvons déterminer le taux de service moyen : $E[S] = \dfrac{E[L]}{D}$ d'où :

$$\Lambda = \frac{\rho}{E[S]} = \frac{\rho D}{E[L]}$$

D'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{\rho}{2DE[L](1-\rho)}(E[L]^2 + \sigma^2[L]) = \frac{\rho}{2D(1-\rho)}E[L]\left(1 + \frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right)$$

Le temps d'attente passé dans la file de sortie du routeur (attente + service) est donc :

$$\forall i \in [1,3] \quad E[R_i] = E[W] + S_i = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[L]}{2D}\left(1 + \frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right) + \frac{l_i}{D}$$

et en moyenne :

$$E[R] = E[W] + E[S] = \frac{E[L]}{D}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[L]}{2D}\left(1+\frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right)+1\right)$$

2- Applications numériques Les temps de services pour chaque classe et moyen sont :

$$ES_1 = 0.5\,\mu s \quad S_2 = 5\,\mu s \quad S_3 = 15\,\mu s$$

Système multi-programmé à mémoire virtuelle

1- Le fait que la file WAIT ne soit jamais vide implique qu'il y a toujours $M = 4$ clients dans le système central. L'étude faite ici est à forte charge.

Pour calculer le temps de réponse moyen R du système complet, on peut écrire la formule de Little, appliquée au réseau entier :

$$(E[Z] + E[R])\Lambda = N$$

On en déduit que (formule 1) :

$$\boxed{E[R] = \frac{N}{\Lambda} - E[Z] = 21\,s}$$

Pour calculer le temps de réponse moyen $E[R']$ du système central, on peut appliquer la formule de Little au système central :

$$E[R']\Lambda = M$$

On en déduit que :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = 10\,s}$$

Le temps moyen $E[W]$ d'attente dans la file WAIT vérifie l'équation : $E[R] = E[W] + E[R']$. On en déduit que :

$$\boxed{E[W] = E[R] - E[R'] = 11\,s}$$

2- Calculer les demandes totales de traitement au CPU et au disque, par interaction.
Les demandes totales de traitement au disque et au CPU sont respectivement $e_{DK}E[S_{DK}]$ et $e_{CPU}E[S_{CPU}]$.

Pour une intéraction, il y a $e_{DK} = 50$ appels au disque. Nous avons donc :

$$\boxed{e_{DK}E[S_{DK}] = 50\;40\;10^{-3} = 2\,s}$$

Ne connaissant pas $E[S_{CPU}]$ (on peut démontrer que e_{CPU} est égal à 51), nous écrivons que $e_{CPU}E[S_{CPU}] = 2s$:

$$\boxed{e_{CPU}E[S_{CPU}] = 2\,s}$$

Pour ces demandes totales au disque et au CPU, nous pouvons majorer le débit de sortie du système central. En effet, le taux d'utilisation de chaque serveur est strictement inférieur à 1. Il y a donc deux inéquations à vérifier :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} < \frac{1}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} \\
\Lambda &= \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} < \frac{1}{e_{DK}E[S_{DK}]}
\end{aligned}$$

Ces deux inéquations conduisent à écrire que le débit de sortie du système central est effectivement majoré :

$$\boxed{\Lambda < 0.5\, interaction/s}$$

Par la suite, on fera l'hypothèse que les services disque et CPU sont distribués suivant des lois exponentielles et indépendantes, que la loi de priorité est FIFO et que les files sont infinies.

3- Nous pouvons décider de modéliser le système central par un réseau ouvert. Si les entrées dans le système étaient poissonniennes, nous nous trouverions dans les conditions d'application du théorème de Jackson.

Dans le cas de services exponentiels, nous savons que le nombre de clients dans la file CPU est $\frac{\rho_{CPU}}{1-\rho_{CPU}}$ avec $\rho_{CPU} = \Lambda e_{CPU} E[S_{CPU}] = 0,4 * 2 = 0,8$ et que celui dans la file du disque est $\frac{\rho_{DK}}{1-\rho_{DK}}$ avec $\rho_{DK} = \Lambda e_{DK} E[S_{DK}] = 0,4 * 2 = 0.8$. Le nombre de clients dans chacune des deux files est donc de $\frac{0.8}{1-0.8} = 4$.

$$\boxed{\text{Le degré de multiprogrammation serait donc de 8.}}$$

Le temps de réponse du système central est déterminé en appliquant la loi de Little au système central :

$$\boxed{\text{Le temps de réponse du système central serait de } E[R'] = \tfrac{8}{0,4} = 20\, s}$$

Les réponses ne correspondent donc pas aux mesures.

$$\boxed{\text{En conclusion, les entrées ne sont pas poissonniennes.}}$$

4- Nous pouvons ici appliquer le théorème de Gordon et Newell. Il est possible de calculer directement les probabilités ou d'appliquer l'algorithme de Reiser

Calcul direct des probabilités

Soient n_1 et n_2 le nombre de clients dans la file CPU, respectivement DK. Nous avons toujours $n_1 + n_2 = 4$. Les probabilités sont, en application du théorème de Gordon et Newell :

$$\begin{array}{rcl}
P(4,0) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^4(e_{DK}S_{DK})^0 & = & C(2)^4(2)^0 = C(2)^4 \\
P(3,1) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^3(e_{DK}S_{DK})^1 & = & C(2)^3(2)^1 = C(2)^4 \\
P(2,2) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^2(e_{DK}S_{DK})^2 & = & C(2)^2(2)^2 = C(2)^4 \\
P(1,3) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^1(e_{DK}S_{DK})^3 & = & C(2)^1(2)^3 = C(2)^4 \\
P(0,4) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^0(e_{DK}S_{DK})^4 & = & C(2)^0(2)^4 = C(2)^4
\end{array}$$

Nous constatons que toutes ces probabilités sont égales. De plus, leur somme est égale à 1. Nous en déduisons :

$$P(4,0) = P(3,1) = P(2,2) = P(1,3) = P(0,4) = \frac{1}{5} = 0,2$$

Le taux d'utilisation du serveur CPU est donc de $U_{CPU} = 1 - P(0,4) = 0.8$, celui du serveur DK est de $U_{DK} = 1 - P(4,0) = 0.8$. Le débit Λ est obtenu en écrivant :

$$\boxed{\Lambda = \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} = \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} = \frac{0,8}{2} = 0,4\, interaction/s}$$

Le nombre de clients dans la file CPU est : $L_{CPU} = 4P(4,0) + 3P(3,1) + 2P(2,2) + 1P(1,0) = 10 * 0,2 = 2$. De même, celui dans la file DK est de $L_{DK} = 2$.

Le nombre de clients total est donc bien de $M = 4$. On applique la formule de Little pour trouver le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = \frac{4}{0,4} = 10\, s.}$$

Algorithme de Reiser

K	1	2	3	4
$e_{CPU}R_{CPU}(K)$	2	3	4	5
$e_{DK}R_{DK}(K)$	2	3	4	5
$\Lambda(K)$	1/4	1/3	3/8	2/5
$L_{CPU}(K)$	1/2	1	3/2	2
$L_{DK}(K)$	1/2	1	3/2	2

Nous aurions pu déterminer la dernière colonne en observant la symétrie pour les deux files. Vu que $e_{CPU}E[S_{CPU}] = e_{DK}E[S_{DK}]$, on a toujours $L_{CPU}(K) = L_{DK}(K) = \frac{K}{2}$. En particulier, $L_{CPU}(3) = L_{DK}(3) = \frac{3}{2}$. Nous pouvions donc directement écrire la quatrième colonne.

Nous déterminons le débit :

$$\boxed{\Lambda = \frac{2}{5} = 0,4\, interaction/s}$$

Nous déterminons le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = e_{CPU}E[R_{CPU}(4)] + e_{DK}E[R_{DK}(4)] = 10\, s}$$

Conclusion

Nous avons pu retrouver le débit et le temps de réponse du système central. Nous pouvons donc affirmer que :

$$\boxed{\text{Le modèle fermé est valable}}$$

5- Nous pouvons ici appliquer le théorème de Gordon et Newell. Il est possible de calculer directement les probabilités ou d'apliquer l'algorithme de Reiser

La file WAIT n'étant jamais vide, nous pourrions reprendre les raisonnements de la seconde question déterminer :

$$e_{DK}E[S_{DK}] = 25 * 40 * 10^{-3} = 1\ s$$

Algorithme de Reiser

K	1	2
$e_{CPU}R_{CPU}(K)$	2	10/3
$e_{DK}R_{DK}(K)$	1	4/3
$\Lambda(K)$	1/3	3/7
$L_{CPU}(K)$	2/3	10/7
$L_{DK}(K)$	1/3	4/7

Nous déterminons le débit :

$$\boxed{\Lambda = \frac{3}{7} \simeq 0,43\, interaction/s}$$

Nous déterminons le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = e_{CPU}E[R_{CPU}(2)] + e_{DK}E[R_{DK}(2)] = \frac{14}{3} \simeq 4,7\, s}$$

Calcul direct des probabilités

Soient n_1 et n_2 le nombre de clients dans la file CPU, respectivement DK. Nous avons toujours $n_1 + n_2 = 2$. Les probabilités sont, en application du théorème de Gordon et Newell :

$$\begin{aligned}
P(2,0) &= C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^2(e_{DK}S_{DK})^0 &= C(2)^2(1)^0 = 4C \\
P(1,1) &= C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^1(e_{DK}S_{DK})^1 &= C(2)^1(1)^1 = 2C \\
P(0,2) &= C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^0(e_{DK}S_{DK})^2 &= C(2)^0(1)^2 = C
\end{aligned}$$

De plus, leur somme est égale à 1. Nous en déduisons que $C = \frac{1}{7}$ d'où

$$P(2,0) = \frac{4}{7},\ P(1,1) = \frac{2}{7},\ P(0,2) = \frac{1}{7}$$

Le taux d'utilisation du serveur CPU est donc de $U_{CPU} = 1 - P(0,2) = \frac{6}{7}$, celui du serveur DK est de $U_{DK} = 1 - P(2,0) = \frac{3}{7}$. Le débit Λ est obtenu en écrivant :

$$\boxed{\Lambda = \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} = \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} = \frac{3}{7} \simeq 0,43\, interaction/s}$$

Le nombre de clients dans la file CPU est : $L_{CPU} = 2P(2,0) + 1P(1,1) = \dfrac{10}{7}$. De même, celui dans la file DK est de $L_{DK} = \dfrac{4}{7}$.
Le nombre de clients total est donc bien de $M = 2$. On applique la formule de Little pour trouver le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = \frac{2}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{3} \simeq 4,7\, s}$$

Calcul du taux de recouvrement
Le taux de recouvrement CPU/disque est la probabilité pour que ces deux unités soient actives simultanément. Il faut donc avoir déterminé les probabilités des nombres de clients dans chaque file pour le déterminer.

$$\boxed{\text{Taux de recouvrement} = P(1,1) = \frac{2}{7} \simeq 0,29 \simeq 29\%}$$

Conclusion
Pour comparer les deux configurations, il ne faut pas comparer les temps de réponse des deux systèmes centraux ! En effet, il s'agit de comparer les performances, vu des terminaux. Un terminal sera donc sensible au temps de réponse du système global, c'est à dire à celui du système central plus celui de la file WAIT. Il est évident que lorsque le nombre de clients dans le système central diminue, le temps de réponse du système central diminue. Il n'est donc pas utile de comparer les temps de réponse. Mais il est aussi évident que lorsque le degré de multiprogrammation diminue, le temps d'attente dans la file WAIT augmente. C'est la somme du temps de réponse du système central et du temps d'attente dans la file WAIT qui nous intéresse ou, ce qui est équivalent vu la formule 1 de la question 1, le débit global. Il vaut donc mieux comparer les débits de ces deux systèmes. Nous observons que celui du second système est légèrement supérieur à celui du premier. En conclusion,

$$\boxed{\text{Il vaut mieux comparer les débits. Cette nouvelle configuration donne de meilleures performances.}}$$

Du choix du point où l'on compte le débit global dans un réseau fermé

1- Nous notons e_i le nombre moyen de passages dans la file i, et e le vecteur dont les composantes sont les e_i. Le réseau étant ouvert, e vérifie l'équation $e = q + eP$ où :

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre moyen de passages par file est donc :

$$\boxed{e_1 = 6 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 2}$$

Le réseau est stable si et seulement si $\forall i \in [1,3] \quad \rho_i = \lambda e_i E[S_i] < 1$. Ici, $\rho_1 = \frac{3}{4}$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$, $\rho_3 = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Le réseau est stable car } \forall i \in [1,3] \quad \rho_i = \lambda e_i E[S_i] < 1.}$$

Afin de calculer le temps de réponse, nous déterminons au préalable le nombre total de clients dans le système pour ensuite appliquer la loi de Little au réseau global.

Pour calculer le nombre moyen de clients dans la file i, nous pouvons appliquer (corollaire du théorème de Jackson) la formule :$L_i = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}$. Nous trouvons :

$$L_1 = 3 \qquad L_2 = 1 \qquad L_3 = \frac{1}{3}$$

.

Nous déterminons ainsi : $L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{13}{3}$. D'où :

Le temps $E[R]$ de réponse de ce système est :

$$\boxed{E[R] = \frac{13}{3}\frac{1}{0.5} = \frac{26}{3}}$$

2- Il y a ici deux façons de répondre à la question : en utilisant l'algorithme de Reiser ou en calculant les probabilités des différents états. Pour chacune de ses manières de procéder, il faut fixer un point où l'on pose $e = 1$.

Reiser avec $e_2 = 1$

En résolvant $e = eP$ avec $e_2 = 1$, nous trouvons :

$$e_1 = 2 \qquad e_2 = 1 \qquad e_3 = \frac{2}{3}$$

Nous pouvons alors dérouler l'algorithme de Reiser :

K	1	2
$e_1E[R_1](K)$	1/2	3/4
$e_2E[R_2](K)$	1/3	4/9
$e_3E[R_3](K)$	1/6	7/36
$\Lambda(K)$	1	36/25
$L_1(K)$	1/2	27/25
$L_2(K)$	1/3	16/25
$L_3(K)$	1/6	7/25

Le temps moyen entre deux passages successifs d'un client donné par la station 2 est le temps de réponse global dans le cas où $e_2 = 1$, c'est à dire :

$$\boxed{\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{7}{36} = \frac{25}{18}}$$

Le temps moyen entre deux passages de clients par la file 2 :

$$\boxed{\frac{1}{\Lambda(2)} = \frac{25}{36}}$$

Le débit au point D est le sixième de celui dans la file 1 qui est lui même le double de celui de la file 2.

Le débit au point D est donc égal à :

$$\boxed{\Lambda_D(2) = \frac{1}{3}\Lambda(2) = \frac{12}{25}}$$

Reiser avec $e_D = 1$

En résolvant $e = eP$ avec $e_D = 1$, nous trouvons :

$$e_1 = 6 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 2$$

Nous pouvons alors dérouler l'algorithme de Reiser :

K	1	2
$e_1E[R_1](K)$	3/2	9/4
$e_2E[R_2](K)$	1	4/3
$e_3E[R_3](K)$	1/2	7/12
$\Lambda(K)$	1/3	12/25
$L_1(K)$	1/2	27/25
$L_2(K)$	1/3	16/25
$L_3(K)$	1/6	7/25

Ici, nous trouvons directement le débit au point D :

$$\boxed{\Lambda_D(2) = \Lambda(2) = \frac{12}{25}}$$

Pour trouver le temps moyen entre deux passages de clients par la file 2, il suffit de remarquer que le débit de la file 2 est trois fois supérieur à celui qui passe au point D, d'où le temps moyen entre deux passages, qui est son inverse :

$$\Lambda_2(2) = \frac{36}{25}$$

$$\boxed{\frac{1}{\Lambda_2(2)} = \frac{25}{36}}$$

Pour trouver le temps moyen entre deux passages d'un même client dans la file 2, on détermine premièrement celui séparant un même client au point D :

$$\frac{9}{4} + \frac{4}{3} + \frac{7}{12} = \frac{25}{6}$$

puis on divise ce temps par trois (puisque le client passe en moyenne 3 fois dans la file 2 quand il passe 1 fois au point D) :

$$\boxed{\frac{25}{6}\frac{1}{3} = \frac{25}{18}}$$

Calcul des probabilités d'états avec $e_D = 1$

Nous trouvons :

$$e_1 = 6 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 2$$

Nous pouvons alors dérouler l'algorithme de Reiser :

Rappelons que ici, $e_1E[S_1] = 6\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$, $e_2E[S_2] = 3\frac{1}{3} = 1$, $e_3E[S_3] = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Calculons les probabilités des différents états :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(2,0,0)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^2.1^0.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{9}{4}C \\
\mathrm{P(1,1,0)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^1.1^1.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3}{2}C \\
\mathrm{P(1,0,1)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^1.1^0.\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{4}C \\
\mathrm{P(0,2,0)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^0.1^2.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = C \\
\mathrm{P(0,1,1)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^0.1^1.\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}C \\
\mathrm{P(0,0,2)} &= C\left(\frac{3}{2}\right)^0.1^0.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}C
\end{aligned}$$

La somme de ces probabilités étant égale à 1, on en déduit que $C = \frac{4}{25}$.

Pour calculer le débit au point D, nous commençons par déterminer le taux d'utilisation de la file 2 :

$$U_2 = P(1,1,0) + P(0,2,0) + P(0,1,1) = \frac{6}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}$$

Le débit s'obtient en divisant par $e_2 E[S_2] = 1$. Nous retrouvons : $\Lambda_D(2) = \frac{12}{25}$.

Nous aurions pu le faire avec la file 3, ou la file 1. Exemple avec la file 3 :

$$U_3 = P(1,0,1) + P(0,1,1) + P(0,0,2) = \frac{3}{25} + \frac{2}{25} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$$

Le débit s'obtient en divisant par $e_3 E[S_3] = \frac{1}{2}$. Nous retrouvons : $\Lambda_D(2) = \frac{12}{25}$.

Théorème de Jackson et Analyse Opérationnelle

Nous commençons par déterminer certaines valeurs afin de répondre aux questions du problème.

Calcul du débit : c'est le nombre de transactions traitées durant la mesure.

$$\Lambda = \frac{720}{1800} = 0,4\, transactions/s$$

Charge de l'unité centrale :

$$e_{UC} E[S_{UC}] = \frac{1440}{720} = 2\, s$$

Charge du premier disque :

$$e_{DK1} E[S_{DK1}] = \frac{36000}{720} * 40 * 10^{-3} = 2\, s$$

Charge du second disque :

$$e_{DK2} E[S_{DK2}] = \frac{18000}{720} * 100 * 10^{-3} = 2,5\, s$$

1- Il faut que le taux d'utilisation de chaque serveur soit strictement inférieur à 1 pour que le système soit stable.
Nous avons ici :

$$\begin{array}{lllllll} \rho_{UC} & = & \Lambda e_{UC} S_{UC} & = & 0,4*2 & = & 0,8 \\ \rho_{DK1} & = & \Lambda e_{DK1} S_{DK1} & = & 0,4*2 & = & 0,8 \\ \rho_{DK2} & = & \Lambda e_{DK2} S_{DK2} & = & 0,4*2,5 & = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Le système n'est pas stable}}$$

Il faut toujours vérifier la stabilité du système avant d'aller plus avant !

2- La durée d'un accès au disque 2 est maintenant de 10 ms. Ceci ne change que la valeur de la charge du second disque :

$$e_{DK2} E[S_{DK2}] = \frac{18000}{720} * 10 * 10^{-3} = 0,25\, s$$

Le taux d'utilisation du second disque est maintenant de 0.1. Le système est stable.

Le calcul du temps de réponse moyen s'effectue en écrivant la loi de Little, après avoir calculé le nombre de clients dans chaque files. Il y a $L_{UC} = \frac{0,8}{1-0,8} = 2$ clients dans la première file, $L_{DK1} = 2$ égalements dans la file du premier disque. Il y a $L_{DK2} = \frac{0,1}{1-0,1}$ clients dans la file du second disque.
Nous en déduisant le temps de réponse $E[R]$ du système :

$$\boxed{E[R] = \frac{L}{\Lambda} = \frac{L_{UC} + L_{DK1} + L_{DK2}}{\Lambda} = \frac{365}{18} = 20,3\, s}$$

$$\boxed{\text{Le taux d'occupation de l'UC est : } U_{UC} = \rho_{UC} = 0,8 = 80\%}$$

Soit $P(n_{UC}, n_{DK1}, n_{DK2})$ la probabilité d'avoir n_{UC} clients dans le l'UC, n_{DK1} clients dans le disque 1 et n_{DK2} clients dans le disque 2. Le taux de recouvrement UC/disque est la probabilité qu'il y ait au moins un client dans l'UC et au moins un client dans l'un des disques :

$$\begin{aligned}
\text{Taux de recouvrement UC/disque} &= \sum_{n_{UC}>0} \sum_{n_{DK1}+n_{DK2}>0} P(n_{UC}, n_{DK1}, n_{DK2}) \\
&= \sum_{n_{UC}>0} \sum_{n_{DK1}+n_{DK2}>0} (1-\rho_{UC})\rho_{UC}^{n_{UC}}(1-\rho_{DK1})\rho_{DK1}^{n_{DK1}}(1-\rho_{DK2})\rho_{DK2}^{n_{DK2}} \\
&= \sum_{n_{UC}>0} (1-\rho_{UC})\rho_{UC}^{n_{UC}} \sum_{n_{DK1}+n_{DK2}>0} (1-\rho_{DK1})\rho_{DK1}^{n_{DK1}}(1-\rho_{DK2})\rho_{DK2}^{n_{DK2}} \\
&= \rho_{UC}(1-(1-\rho_{DK1})(1-\rho_{DK2}))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Taux de recouvrement UC/disque} &= \rho_{UC}(\rho_{DK1}+\rho_{DK2}-\rho_{DK1}\rho_{DK2}) \\ &= \frac{148}{225} = 0,656 = 65,6\%\end{aligned}}$$

Réseau local

1- On peut utiliser le théorème BCMP.
2- Comme ce qui nous intéresse est le temps de réponse vu des terminaux et que ce temps ne dépend pas du nombre moyen L_T de clients vus les terminaux, on n'a pas besoin de calculer L_T.
Pour le calcul du débit, on applique la loi de Little a l'ensemble et on divise K par le temps mis par un client pour parcourir l'ensemble du réseau entre deux passages successifs par un point où on compte le débit global (on peut choisir le point de sortie des terminaux). Au dénominateur de Λ, on ne compte donc le temps de réflexion Z que pour le client auquel on s'intéresse donc on ne prend $E[Z]$ qu'une fois.
Le temps de réponse est alors dans la colonne 6 de l'algorithme de Reiser : c'est la somme des termes autres que $E[Z]$.

La demande totale pour le CPU est :

$$e_{CPU}E[S_{CPU}] = 5\,s$$

La demande totale pour le disque 1 est :

$$e_{DK1}E[S_{DK1}] = 500 * 10 * 10^{-3} = 5\,s$$

La demande totale pour le disque 2 est :

$$e_{DK2}E[S_{DK2}] = 500 * 10 * 10^{-3} = 5\,s$$

K	1	2	3	4	5	6
$e_{Term}E[R_{Term}(K)]$	10	10	10	10	10	10
$e_{CPU}E[R_{CPU}(K)]$	5	6	50/7	185/22	303/31	13670/1219
$e_{DK1}E[R_{DK1}(K)]$	5	6	50/7	185/22	303/31	13670/1219
$e_{DK2}E[R_{DK2}(K)]$	5	6	50/7	185/22	303/31	13670/1219
$\Lambda(K)$	1/25	1/14	21/220	88/775	155/1219	3657/26600
$L_{CPU}(K)$	1/5	3/7	15/22	148/155	1515/1219	4101/2660
$L_{DK1}(K)$	1/5	3/7	15/22	148/155	1515/1219	4101/2660
$L_{DK2}(K)$	1/5	3/7	15/22	148/155	1515/1219	4101/2660

Le temps de réponse $E[R]$ du réseau vu des terminaux est donc de :

$$\boxed{E[R] = 3 * \frac{13670}{1219} = 33,64\,s}$$

Réseau symétrique

On veut utiliser une méthode d'agrégation pour agréger les M stations en une seule.
Les M stations sont exponentielles, de priorité PAPS, de capacités supposées infinies. Il y a un seul point d'entrée et le routage est probabiliste. Il y a un seul point de sortie.
On est donc dans les hypothèses du théorème BCMP.

On ferme le réseau sur lui-même et on détermine le débit du réseau fermé en fonction de N, M et $E[S]$ à l'aide de l'algorithme de Reiser.
Tous les $e_iR_i(K)$ sont égaux à $\frac{1}{M}E[S]$. Donc $L_i(n-1) = \frac{n-1}{M}$. D'où

$$e_iR_i(n) = \frac{E[S]}{M}(1 + L_i(n-1)) = \frac{E[S]}{M}(1 + \frac{n-1}{M})$$

On en déduit :

$$\Lambda(n) = \frac{n}{\sum_i e_iR_i(n)} = \frac{n}{E[S](1 + \frac{n-1}{M})} = \frac{nM}{E[S](M+n-1)}$$

Le taux du serveur équivalent est donc :

$$\boxed{\mu(n) = \frac{nM}{E[S](M+n-1)}}$$

Agrégation de chaînes de Markov

1- La chaîne de Markov est à temps discret. La somme des probabilités sortantes de chaque état est donc égale à 1. D'où :

$$\boxed{P_{01} = \frac{1}{4},\ P_{11} = \frac{7}{8},\ P_{22} = \frac{7}{8}}$$

2- Pour déterminer les probabilités des trois états, on peut écrire $\pi = \pi P$ où P est la matrice de transition et écrire la condition de normalisation.
Nous déterminons ici les probabilités en effectuant deux coupes qui permettent d'écrire $\frac{1}{8}\pi(2) = \frac{5}{8}\pi(0)$ d'une part, et $\frac{1}{8}\pi(1) = \frac{1}{4}\pi(0)$ d'autre part.
La condition de normalisation, $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ permet alors de conclure :

$$\boxed{\pi(0) = \frac{1}{8},\ \pi(1) = \frac{1}{4},\ \pi(2) = \frac{5}{8}}$$

3- Calcul de P_{1A}
Nous avons nécessairement :

$$\boxed{P_{1A} = 1 - P_{11} = \frac{1}{8}}$$

Calcul de P_{A1}
En effectuant une coupe entre les états A et 1, nous avons : $\pi(A)P_{A1} = \pi(1)P_{1A}$ d'où :

$$\boxed{P_{A1} = \frac{1}{24}}$$

Remarque : la transition de A vers 1 ne se fait pas pour tous ceux qui sont dans A mais seulement parmi ceux-ci pour ceux qui sont dans 0. Donc on trouve :

$$\begin{aligned} P_{A1} &= P_{01} * P[O/A] \\ &= P_{01}\frac{\pi(0)}{\pi(0)+\pi(2)} \\ &= \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{5}{8}} \end{aligned}$$

Calcul de P_{AA}

$$\boxed{P_{AA} = 1 - P_{A1} = \frac{23}{24}}$$

Rappel du théorème de Kemeny

"Une condition nécessaire et suffisante pour que l'agrégation d'une chaîne de Markov soit exacte pour la partition $A = A_1, ..., A_s$ est que pour toute paire d'agrégats (A_i, A_j), p_{kA_j} ait la même valeur pour tout k dans A_i. Ces valeurs communes $\hat{p}_{ij}$ sont les valeurs de la matrice de transition de la chaîne agrégée."
J.G. Kemeny

$$\boxed{\text{Cette agrégation n'est donc pas exacte car } P_{01} \neq P_{21}.}$$

Agrégation de files d'attente

Pour les réseaux de type Gordon et Newell, la méthode d'agrégation est une méthode exacte.
1- On étudie l'ensemble constitué par les files 2 et 3 en refermant cet ensemble sur lui-même. Pour ce sous-réseau, on est de nouveau dans les conditions d'application du théorème de Gordon et Newell (Files PAPS à un serveur exponentiel de capacités infinies avec routages probabilistes).
*R*emarques :
1) Comme $p_{12} + p_{13} = 1$, on n'a pas besoin de recalculer les probabilités d'aller dans les files 2 et 3.
2) Le point d'observation est forcément dans le rebouclage.

Deux méthodes sont possibles pour déterminer le débit $\Lambda(n)$.

Calcul direct des probabilités

Entre deux passages dans le rebouclage : $e_3 = p_{13}$ et $e_2 = p_{12}$. D'où $e_2E[S_2] = e_3E[S_3] = 20$. Les états possibles du systèmes sont (n_2, n_3) avec $n_2 + n_3 = n$:

$$\begin{aligned} P(n_2, n_3) &= C(e_2E[S_2])^{n_2}(e_3E[S_3])^{n_3} \\ &= C(20)^{n_2}(20)^{n_3} \\ &= C(20)^n \end{aligned}$$

Toutes ces probabilités sont donc égales et il y a $n + 1$ probabilités. d'où : $P(n_2, n_3) = \dfrac{1}{n+1}$.

Il suffit de déterminer le taux d'utilisation U_2 du serveur 2 pour déterminer $\Lambda(n)$:

$$\boxed{\Lambda(n) = \frac{U_2}{e_2E[S_2]} = \frac{1 - P(n, 0)}{e_2E[S_2]} = \frac{n}{20(n+1)}}$$

Algorithme de Reiser (MVA)

Comme $e_2E[S_2] = e_3E[S_3]$, les nombres moyens de clients dans les deux files sont identiques : $L_2(n-1) = \dfrac{n-1}{2}$ et $L_3(n-1) = \dfrac{n-1}{2}$. En appliquant le théorème de Sevick-Mitrani :
$e_2R_2(n) = e_2E[S_2](1 + L_2(n-1)) = 20\left(1 + \dfrac{n-1}{2}\right)$, d'où :

$$R = e_2R_2(n) + e_3R_3(n) = 2 * 20\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) = 20(n+1)$$

On a donc :

$$\boxed{\Lambda(n) = \frac{n}{20(n+1)}}$$

2- On remplace l'ensemble file 2 et file 3 par une seule file à taux de service $\mu(n)$ dépendant du nombre de clients dans la file avec $\mu(n) = \Lambda(n)$.

Quelque soit le point d'observation, on a $e_1 = 1$ et $e = 1$ où e est le nombre de passages dans la file composite. Nous sommes encore dans les conditions d'application de Gordon et Newell.

Pour les files dont le taux de service dépend de l'état, l'expression $\left(\dfrac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$ devient $\displaystyle\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_i}{\mu_i(j)}$.

Les états possibles du système sont $(0, K)$, $(1, K-1)$, ..., $(K, 0)$, avec :

$$\forall n \in [0, K] \quad P(K-n, n) = C.(e_1 E[S_1])^{K-n} \left(\frac{e}{\mu(1)} \frac{e}{\mu(2)} \cdots \frac{e}{\mu(n)} \right)$$

On a $e_1 E[S_1] = 10$ et $e = 1$ d'où :

$$\forall n \in [0, K] \quad P(K-n, n) = C.10^{K-n}.20^n.(n+1)$$

Posons $C' = 10^k$, soit $\forall n \in [0, K] \quad P(K-n, n) = C'.2^n.(n+1)$.
En utilisant l'équation de normalisation, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{K} P(k-n, n) = 1 = C' \sum_{n=0}^{K} 2^n.(n+1)$$

Le calcul de la seconde somme conduit à : $C' = \dfrac{1}{1 + K2^{K+1}}$.
On en déduit le taux d'utilisation du serveur 1 :

$$\boxed{U_1(K) = 1 - P(0, K) = 1 - \frac{(K+1)2^K}{1 + K2^{K+1}} = \frac{1 + (K-1)2^K}{1 + K2^{K+1}}}$$

On peut remarquer que le numérateur à l'étape k est égal au dénominateur à l'étape $k-1$.
Les applications numériques donnent :

$$\boxed{U_1(1) = \frac{1}{5},\ U_1(2) = \frac{2}{17},\ U_1(3) = \frac{17}{49},\ U_1(4) = \frac{49}{129}}$$

Autre méthode

On aurait pu appliquer directement Gordon et Newell à l'ensemble du réseau. Le point d'observation est choisi dans le rebouclage. On a alors $e_1 = 1$, $e_2 = p_{12}$ et $e_3 = p_{13}$. On a alors $e_1 E[S_1] = 10$, $e_2 E[S_2] = 20$ et $e_3 E[S_3] = 20$.

Liste des états possibles et calcul des probabilités :

$$\left.\begin{array}{rcccc} P(0,0,K) & = & C.10^0.20^0.20^K & = & C.10^0.20^K \\ P(0,1,K-1) & = & C.10^0.20^1.20^{K-1} & = & C.10^0.20^K \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(0,K,0) & = & C.10^0.20^K.20^0 & = & C.10^0.20^K \end{array}\right\} (K+1) \text{ états}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} P(1,0,K-1) & = & C.10^1.20^0.20^{K-1} & = & C.10^1.20^{K-1} \\ P(1,1,K-2) & = & C.10^1.20^1.20^{K-2} & = & C.10^0.20^{K-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(1,K-1,0) & = & C.10^1.20^{K-1}.20^0 & = & C.10^1.20^{K-1} \end{array}\right\} K \text{ états}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P(K,0,0) \quad = \quad C.10^K.20^0.20^0 \quad = \quad C.10^K.20^0 \ \big\}\ 1 \text{ états}$$

en posant $C' = C.10^K$, on a encore une fois :

$$\sum_{n=0}^{K} \sum_{n_1=0}^{n} P(k-n, n_1, n-n_1) = 1 = C' \sum_{n=0}^{K} (n+1).2^n$$

On retrouverait C' et :

$$\boxed{U_1(K) = 1 - \sum_{n=0}^{K} P(0, n, K-n) = 1 - (K+1)C'2^K}$$