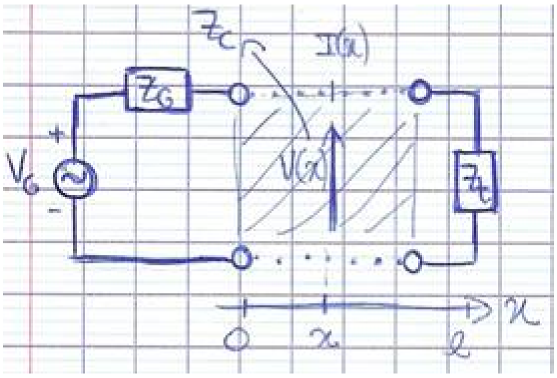
POUGNES PHOENIX TSP

# PHY 3102 - Hyperfréquences

## Lignes




$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$$

Le premier terme représente une onde progressive vers les $x$ croissants, et le second vers les $x$ décroissants.

$$I(x) = \frac{1}{Z_C}(Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x})$$

**Coefficient de propagation :** $\gamma = \alpha + i\beta$

$\alpha$ est l'atténuation du signal, $\beta$ la partie propagative.

**Remarque.** *Sans perte* $\Leftrightarrow$ *sans atténuation* $\Leftrightarrow \alpha = 0$

**Vitesse de phase :** $v_\phi = \dfrac{\omega}{\beta}$

**Coefficient de reflexion :** $\Gamma(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{Be^{\gamma x}}{Ae^{-\gamma x}} = \dfrac{B}{A}e^{2\gamma x}$

**Coefficient de reflexion en bout de ligne :** $\Gamma_t = \dfrac{Z_t - Z_c}{Z_t + Z_c}$

**Rapport d'ondes stationnaires :** $ROS = \dfrac{1 + |\Gamma_t|}{1 - |\Gamma_t|}$

**Puissance transmise à la charge par le générateur :**

$$P = \frac{1}{2}Re(VI^*) = \frac{1}{2}R_t|I|^2 \text{ d'où } \boxed{P = \frac{1}{2}R_t\frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_t|^2}}$$

$P = P_{max} \Leftrightarrow Z_t = Z_g^* \Leftrightarrow \boxed{P_{max} = \dfrac{1}{8}\dfrac{|V_g|^2}{R_g}}$ *(atteinte en $x = 0$, là où se trouve le générateur).*

**Remarque.**

$$Z_g = R_g + jX_g$$
$$Z_t = R_t + jX_t$$

## Guides d'ondes (orientés suivant z) - Note : $\vec{B} = \mu\vec{H}$

**Mode TE (Transverse Electrique) :** $H_z \neq 0$ *et* $E_z = 0$
**Mode TM (Transverse Magnétique) :** $E_z \neq 0$ *et* $H_z = 0$
**Mode TEM (Transverse Electrique Magnétique) :** $H_z \neq 0$ *et* $E_z \neq 0$

### Guide Rectangulaire (Milieu homogène sans pertes) :

*Soit* $\underline{u}$ *une composante de* $\vec{E}$ *ou* $\vec{H}$*. Par l'équation de Helmhotz :*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \frac{d^2 u_y}{dy^2} + \frac{d^2 u_z}{dz^2} + k^2 u = 0$$

*avec :* $k \underset{\left(\lambda = \frac{\lambda_0}{n}\right)}{=} k_0 n = k_0\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$

*(*$n = \sqrt{\varepsilon_r}$ *: indice du milieu,* $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, $\boxed{k_z = \frac{2\pi}{\lambda}}$, $\boxed{\omega = 2\pi f}$*)*

*On pose ensuite*[1] *:* $u(x, y, z) = u_x(x)u_y(y)u_z(z)$*, d'où :*

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0(x, y)e^{-jk_z z} = (\vec{E}_T + E_z\vec{u}_z)e^{-jk_z z}$$
$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y)e^{-jk_z z} = (\vec{H}_T + H_z\vec{u}_z)e^{-jk_z z}$$
$$\begin{cases} u_x(x) = A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x \\ u_y(y) = A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y \end{cases}$$

$\vec{H}$ *ou* $\vec{E}$ $= (A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x)(A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y)e^{-jk_z z}$
$k_z$ *: constante de propagation du mode*
$\vec{E}_0, \vec{H}_0$ *: répartition de champ transverse*

**Equation de dispertion :** $k = f(\omega)$
**Vitesse de phase :** $v_\phi = \frac{\omega}{k_z}$
**Vitesse de groupe :** $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
**Milieu non dispersif :** $k_z = a\omega$, $(a \in \mathbb{R})$ *ici, ssi* $k_z = k$
**Milieu dispersif :** $k_z \neq a\omega$, $(a \in \mathbb{R})$ *ici, ssi* $k_z \neq k$
**Equation de séparation :** $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

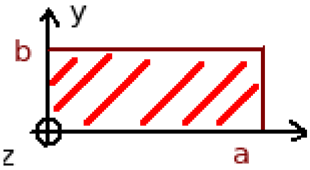
**Remarque.** *Dans un guide homogène de type tube parfaitement conducteur (guide rectangulaire, circulaire, etc), seuls les modes TE ou TM peuvent exister.*

1. Parce qu'on constate mathématiquement que ça marche.

## Mode TE dans un guide homogène parfaitement conducteur

$\boxed{\textit{Mode TE : } E_z = 0 \Rightarrow \textit{ On cherche } H_z.}$

*Pour cela, posons* $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ *et* $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$




*Conditions aux limites :* $\vec{E} = \vec{0}$ *dans les parois :*
$E_y(0, [0, b], z) = E_y(a, [0, b], z) = 0$, *et* $E_x([0, a], 0, z) = E_x([0, a], b, z) = 0$, *d'où :*
$B_x = B_y = 0$, $k_x = \dfrac{n\pi}{a}_{\{n \in \mathbb{N}\}}$, $k_y = \dfrac{m\pi}{b}_{\{m \in \mathbb{N}\}}$

*D'où :* $H_z = H_0 \cos\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)e^{-jk_z z}$

**Remarque.** *En milieu dispersif :*

$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left[j\omega\mu\begin{pmatrix} -\frac{dH_z}{dy} \\ \frac{dH_z}{dx} \end{pmatrix} - jk_z\begin{pmatrix} -\frac{dE_z}{dx} \\ \frac{dE_z}{dy} \end{pmatrix}\right]}$$

$$\boxed{\vec{H}_T = \frac{-1}{k^2 - k_z^2}\left[j\omega\varepsilon\begin{pmatrix} -\frac{dE_z}{dy} \\ \frac{dE_z}{dx} \end{pmatrix} + jk_z\begin{pmatrix} -\frac{dH_z}{dx} \\ \frac{dH_z}{dy} \end{pmatrix}\right]}$$

*Ici,* $E_z = 0$ *donc finalement :* $\vec{E}_T = \dfrac{1}{k^2 - k_z^2}j\omega\mu\begin{pmatrix} -\frac{dH_z}{dy} \\ \frac{dH_z}{dx} \end{pmatrix}$ *et* $\vec{H}_T = \dfrac{-1}{k^2 - k_z^2}jk_z\begin{pmatrix} -\frac{dH_z}{dx} \\ \frac{dH_z}{dy} \end{pmatrix}$

## Mode TM dans un guide homogène parfaitement conducteur

$\boxed{\textit{Mode TM : } H_z = 0 \Rightarrow \textit{ On cherche } E_z.}$

*Pour cela, on utilise les mêmes notations et les* ***conditions aux limites*** *de* $\vec{E}$*. On trouve :*

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-jk_z z}$$

### Conclusions sur les guides

#### Equation de séparation

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k_z^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\right)^2$$

$\rightarrow k_z = f(\omega)$ *(on a bien un milieu dispersif car* $k_z \neq \alpha\omega$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*)*

#### Fréquence de coupure $k_z = 0$ *et* $k = k_c$

$$k_c^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 = k^2 = \left(\frac{\omega_c}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\right)^2$$

POUGNES PHOENIX TSP

## Bruits / Non linéarités

*Puissance :* $N = k_B T \Delta f$
*(puissance de bruit)*
$T$ *: Température*
$k_B$ *: Constante de Boltzman*
$\Delta f$ *: Bande passante.*

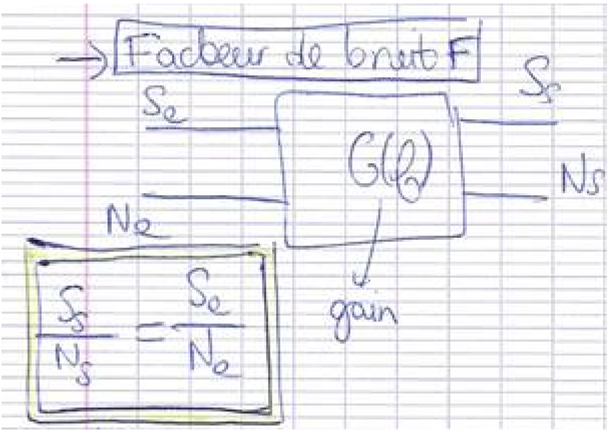
### Loi de Plank :

*Si* $hf << k_B T$*,* $\dfrac{dW}{df} = k_B T$

*(densité spectrale de bruit)*

$$\boxed{\frac{dW}{df} = \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1}}$$

### Facteur de bruit F :




$N_e = k_B T_0 \Delta f$
$N_s \geq G N_e$
$S_s = G S_e$
$N_s = F G N e$
$N_{e/s}$ *est le bruit en entrée/sortie du composant.*

*Quadripôle* $G(f)$ *parfait* $\Rightarrow N_s = G N_e$
*Quadripôle* $G(f)$ *imparfait* $\Rightarrow N_s = G N_e + N_q$*, où* $N_q$ *est le bruit du composant.*

**Remarque.** $F_{dB} = 10 \log F \ (dB) \Leftrightarrow F = 10^{\frac{F_{dB}}{10}}$ *(linéaire*[2]*)*

*Finalement :* $\boxed{F = \dfrac{\left(\frac{S}{N}\right)_e}{\left(\frac{S}{N}\right)_s} = \dfrac{1}{G}\dfrac{N_s}{N_e}}$ *et en série :* $\boxed{F = F_1 + \dfrac{F_2 - 1}{G_1} + \dfrac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \ldots + \dfrac{F_n - 1}{G_1 G_2 \ldots G_{n-1}}}$

**Remarque.** *En optimisation de circuits, il faut donc choisir* $G_1$ *le plus élevé et* $F_1$ *le plus faible pour obtenir* $F$ *le plus petit possible.*

### Non linéarités - Cas théorique

*Si* $V_e(t) = A \cos \omega t$ *et* $V_s(t) = \alpha_1 V_e(t) + \alpha_2 V_e^2(t) + \alpha_3 V_e^3(t)$ *(non-linéarité d'ordre 3 pour* $V_s(t)$*) :*

- *L'harmonique* $n$ *est proportionnelle à* $A^n$
- $\alpha_1 V_e(t)$ *est le comportement fondamental de* $V_s(t)$

*Si* $V_e(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$*, il y a apparition pour* $V_s(t)$ *des produits d'intermodulation :* $\{PIM_2\} = \{\omega_1 \pm \omega_2\}$*,* $\{PIM_3\} = \{2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1\}$*...* $\{PIM_n\} = \{k\omega_1 \pm (n-k)\omega_2\}_{k \in [\![1,n]\!]}$

$\boxed{\text{Dynamique sans parasite : } SDFR = P_{entréeMAX} - P_{entréeMIN}}$

2. Pour une puissance par exemple : $dBm \leftrightarrow mW$

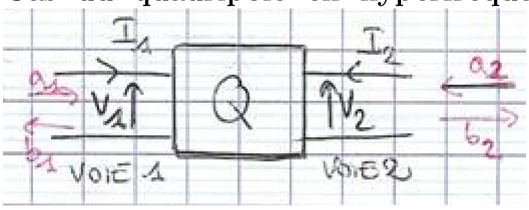
## Multipôles : composantes à plusieurs bornes

*quadripôle : 2 voies d'accès = 4 bornes*
*hexapôle : 3 voies d'accès = 6 bornes*
*octopôle : 4 voies d'accès = 8 bornes*

## Caractérisation d'un multipôle (n voies) :

→ *2n variables à déterminer : n tensions, n courants.*

**Cas du quadripôle en hyperfréquences**




$a_i = \dfrac{V_i + R_i I_i}{2\sqrt{R_i}}, b_i = \dfrac{V_i - R_i^* I_i}{2\sqrt{R_i}}$

*Servent à définir :* $P_i = \dfrac{|a_i|^2 - |b_i|^2}{2}$
*(puissance transmise sur la voie i)*

$a_i$ *: partie transmise sur la voie i*
$b_i$ *: partie réfléchie vers la voie i*
$Z_i = R_i + jX_i$ *: impédance caractéristique du coté i.*
*On souhaite exprimer simplement* $b_i$ *en fonction de* $a_i$ *(et en déduire* $P_i$*)*
→ *On définit la matrice de diffusion S par :*

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases}$$

**Conclusions** *Les coefficients de S définissent :*

$S_{11} = \left.\dfrac{b_1}{a_1}\right)_{a_2=0}$ *: Coefficient de réflexion en entrée quand* $a_2 = 0$

$S_{22} = \left.\dfrac{b_2}{a_2}\right)_{a_1=0}$ *: Coefficient de réflexion en sortie quand* $a_1 = 0$

$S_{21} = \left.\dfrac{b_2}{a_1}\right)_{a_2=0}$ *: Coefficient de transmission* $1 \to 2$ *quand* $a_2 = 0$

$S_{12} = \left.\dfrac{b_1}{a_2}\right)_{a_1=0}$ *: Coefficient de transmission* $2 \to 1$ *quand* $a_1 = 0$

**Interpretation physique**

$S_{ii}$ : *Coefficient de réflexion sur la voie i.* $S_{ii} = \dfrac{b_i}{a_i}$ *quand les autres voies sont adaptées.*

- $S_{ii} = 0 \Leftrightarrow b_i = 0$ *donc pas de réflexion sur la voie i*
- $S_{ii} = 1 \Leftrightarrow b_i = a_i$ *donc réflexion totale sur la voie i*

$S_{ij}$ : *Coefficient de transmission* $j \to i$. $S_{ij} = \dfrac{b_i}{a_j}$

- $S_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_i = 0$ *donc pas de transmission* $j \to i$
- $S_{ij} = 1 \Leftrightarrow b_i = a_j$ *donc transmission totale* $j \to i$

**Remarque.** $S_{ii} = \Gamma_i = \dfrac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c}$, *donc*

| $Z_i$ | $\Gamma_i$ | |
|---|---|---|
| *0* | *-1* | *(court-circuit)* |
| $\infty$ | *1* | *(circuit ouvert)* |
| $Z_c$ | *0* | |

*La voie i est donc dite* ***adaptée*** *s'il n'y a pas de reflexion* $(\Gamma_i = 0)$
*et* ***désadaptée*** *s'il y a reflexion* $(\Gamma_i \neq 0)$

**Remarque.** *Pas de lien* a priori *entre non réflexion et transmission totale :*
*Il ne faut pas oublier les éventuelles pertes lors de la transmission.*

**Propriétés éventuelles de la matrice S**

**Réciprocité :** $\forall ij,\ S_{ij} = S_{ji}$

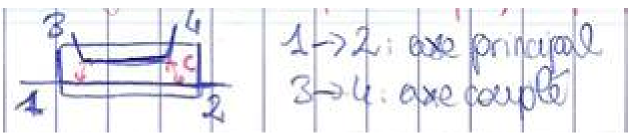
**Antiréciprocité :** $\forall i \neq j,\ S_{ij} = -S_{ji}$

**Adaptation :** $\forall i,\ S_{ii} = O$

**Unilatéralité :** $\forall ij,\ S_{ij} = 0$ *et* $S_{ji} \neq 0$

**Idéalité (pas de perte) :** $SS^{t*} = Id$, *où* $S^{t*}$ *est la transconjuguée de S.*

**Le coupleur directif** *Il s'agit d'un octopôle adapté, réciproque et sans pertes.*




*On définit pour ce composant :*

**Coefficient de couplage :** $C_{dB} = 20 \log |S_{41}| = 20 \log |S_{23}|$ *car* $\boxed{S_{41} = S_{23}}$

**Isolation :** $I_{dB} = 20 \log \dfrac{1}{|S_{21}|} = -20 \log |S_{21}| = -20 \log |S_{43}|$ *car* $\boxed{S_{21} = S_{43}}$

**Directivité :** $D_{dB} = 20 \log \dfrac{|S_{41}|}{|S_{21}|} = I_{dB} + C_{dB}$, *car* $D = I \cdot C$

# Rayonnement et antennes

*→ coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$*

*Cadre : approximation des "champs lointains" (domaine de rayonnement des sources) : $r > \dfrac{2D^2}{\lambda}$, où $r$ est la distance au point d'observation et $D$ diamètre de la plus petite sphère centrée à l'origine et contenant l'ensemble des sources (=antenne).*

*Dans ce cadre, l'onde a **localement** une structure d'onde plane ; on peut donc à partir de $\vec{E}(r)$ déduire $\vec{H}(r)$ par[3] :0 $\boxed{\vec{H}(M) = \dfrac{1}{\eta}\vec{u}_r \wedge \vec{E}(r)}$ ; avec $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\xi}}$ l'impédance d'onde du milieu diélectrique (dans l'air, $\eta_0 = 120\pi$)*

## Vecteur de Poynting

*Sa partie réelle est la densité de flux de puissance[4] : $\vec{\Pi}(M) = \vec{E}(M) \wedge \vec{H}(M) = \dfrac{1}{2\eta}||\vec{E}(M)||^2$*

## Principe de superposition

*En résumé, linéarité des champs engendrés par les sources si le milieu est linéaire.*

## Théorème de translation

*La translation d'une source (en champ lointain) ne modifie que la phase du champ rayonné.*

## Densité de puissance : $\boxed{\vec{U}(\theta, \phi) = r^2\vec{\Pi}(\theta, \phi)}$

## Directivité

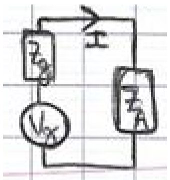
$\boxed{D(\theta, \phi) = \dfrac{U(\theta, \phi)}{U_{moyen}}}$ *avec* $\boxed{U_{moyen} = \dfrac{P_{rayonnée}}{4\pi}}$ *avec* $\boxed{P_{rayonnée} = \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \Pi(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta d\theta d\phi}$

**Remarque.** *Si on demande de calculer la directivité de cette antenne pour $\theta, \rho$ quelconques :*
*$D = \dfrac{U_{max}}{U_{moyen}}$ → directivité dans sa direction de rayonnement maximal ;*
*d'où $U_{max} = r^2\Pi(r, \theta_0, \rho_0)$, avec $(\theta_0, \rho_0)$ la direction de rayonnement maximal.*
*2 types de rayonnement : **directif** (une seule direction de rayonnement max)*
*et **omnidirectionnel** (rayonnement maximal dans tous les directions).*

3. $\vec{H}(M) = \mu\vec{B}(M)$
4. Puissance rayonnée par unité de surface

### Antenne à l'émission

*Circuit équivalent :*




- $Z_g = R_g + jX_g$ : *impédance interne*
- $V_g$ : *f.e.m (générateur)*
- $Z_A$ : *charge de l'antenne*

### Bilan de puissance

$$\boxed{P_{dispo} = P_{entrée} = P_{alimentation} = \frac{|V_g|^2}{8R_g}} \left( = \frac{|V_{g\ eff}|^2}{4R_g} \right)$$

$P_{dispo}$ *est la puissance disponible pour le générateur. C'est une puissance max* $(Z_A = Z_g^*)$

*Coeff de réflexion en puissance :* $\boxed{\Gamma = \dfrac{Z_A - Z_g^*}{Z_A + Z_g}}$

$$\rightarrow P_{incidente} = P_e - P_{réféchie} = P_e - |\Gamma|^2 P_e = (1 - |\Gamma|^2) P_e$$
$$\rightarrow P_{dissipée} = (1 - e_{cd}) P_{incidente} = \tfrac{1}{2} R_L |I|^2$$

$e_{cd} = \frac{R_r}{R_r + R_L}$ *est le coeff d'efficacité lié aux pertes ohmiques*
$(e_{cd} \leq 1$, *avec égalité ssi pas de pertes*)
$R_L$ *est la résistance de pertes*
$\Rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2} R_r |I|^2 = P_{rayonée}} = P_{incidente} - P_{dissipée} = e_{cd} P_{incidente} \boxed{= e_{cd}(1 - |\Gamma|^2) P_e}$
$\tfrac{1}{2} R_r |I|^2 = P_{rayonée} = e_{cd}(1 - |\Gamma|^2) P_e = k_{eff} P_e$, *où* $k_{eff}$ *est le facteur d'efficacité de l'antenne.*

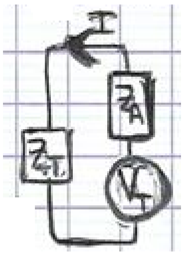
**Remarque.** $R_A\,(= \Re(Z_A)) = (R_r + R_L) \left| \dfrac{I}{I_e} \right|^2$ *($I_e$ courant présent à l'alimentation de l'antenne)*

**Gain :** $\boxed{G(\theta, \rho) = \dfrac{U(\theta, \rho)}{U_{ref}(\theta, \rho)}}$

- *Si on demande de "Calculer le gain de l'antenne",* $G = \dfrac{U_{max}}{U_{ref}(\theta, \rho)}$
- *Si le milieu est* isotrope : $G_{iso}(\theta, \rho) = \dfrac{U(\theta, \rho)}{U_{ref\ iso}(\theta, \rho)}$, *avec* $U_{ref\ iso}(\theta, \rho) = \dfrac{P_e}{4\pi}$

$$\begin{cases} G_{iso} & = \dfrac{U}{\frac{P_e}{4\pi}} \\ D & = \dfrac{U}{\frac{P_{rayonée}}{4\pi}} \end{cases} \Rightarrow G_{iso}(\theta, \rho) = \frac{P_{rayonnée}}{P_e} D(\theta, \rho) = k_{eff} D(\theta, \rho) \leq D(\theta, \rho)$$

### Antenne en réception



*Circuit équivalent :*

- $Z_T$ *: impédance du récepteur charge terminale*
- $V_T$ *: f.e.m. (générateur)*
- $Z_A$ *: charge de l'antenne*

*Aire équivalente en réception :*

$$A_{eq}(\theta, \rho) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta, \rho)$$

**Bilan de liaison en espace libre :** $\boxed{\boxed{\frac{P_r}{P_e} = \frac{G_e G_r}{A_{attel}}}}$ **(oui c'est important)**

$A_{ttel} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2$ *est l'atténuation en espace libre, d la distance entre l'émetteur et le récepteur*

$P_r$ *est la puissance transmise au récepteur*

### Diagramme de rayonnement

*C'est la représentation graphique de* $\Pi$ *ou* $U$ *(en puissance) ou de* $E(M)$ *(en champ)*

*Normalisés :* $\frac{\pi}{\pi_{max}}$ / $\frac{U}{U_{max}}$ *ou* $\frac{E}{E_{max}}$
*Logarithmiques :* $10 \log \Pi$ *ou* $10 \log U$ *ou* $20 \log E$
*Logarithmiques normalisés :* $10 \log \frac{\pi}{\pi_{max}}$ *etc...*